

巴系イデアルの第 1 ヒルベルト係数の挙動と環構造について

大関 一秀 (明治大学先端数理科学インスティテュート)

1. はじめに

本報告の内容は, L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, T. T. Phuong, W. V. Vasconcelos との共同研究 [GhGHOPV] 及び, 後藤四郎教授との共同研究 [GO] に基づいて構成されたものである.

本報告の目的は, ヒルベルト函数の挙動を指標に, 与えられた局所環内 (A, \mathfrak{m}) にどのような \mathfrak{m} -準素イデアルがいかにも多様に含まれているかを解析しながら, 局所環の可換環論を展開するものである.

以下, A を (可換な) Noether 局所環とし, その極大イデアルを \mathfrak{m} と表し Krull 次元を $d = \dim A > 0$ とする. 環 A 内の \mathfrak{m} -準素イデアル I に対して, 整数 $\{e_I^i(A)\}_{0 \leq i \leq d}$ たちが存在し, 十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して, イデアル I のヒルベルト函数 $\ell_A(A/I^{n+1})$ が

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_I^0(A) \binom{n+d}{d} - e_I^1(A) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_I^d(A)$$

という形の多項式で表わされることがよく知られている. 但し, $\ell_A(*)$ は A -加群としての長さを表す. これを, イデアル I のヒルベルト多項式と呼び, 各係数 $e_I^i(A)$ たちをイデアル I の第 i ヒルベルト係数と呼ぶ. 特に, 先頭項の係数 $e_I^0(A) (> 0)$ はイデアル I の重複度と呼ばれる. このヒルベルト函数の挙動には, イデアル I の構造のみならず基礎環 A の構造もかなり忠実に反映されていると考えられる.

次数付代数のヒルベルト函数の研究は D. Hilbert の不変式論の研究にまで遡るが, 局所環のヒルベルト函数の研究も P. Samuel や A. Grothendieck によって 1950 年代までには基礎理論が整備され, その後, D. Northcott, S. Abhyankar, E. Matlis, J. Sally たちにより, blow-up 代数の環構造研究との関わりの中で深い研究が行われた.

本報告の目的は, Noether 局所環内の巴系イデアルを取り出し, そのヒルベルト函数 $\ell_A(A/Q^{n+1})$ の挙動を用いて基礎環の構造を分類することにある.

ここで, 本報告の構成について述べたい. 第 2 節では, 巴系イデアルの第 1 ヒルベルト係数の消滅性と基礎環の Cohen-Macaulay 性について述べる. また, $e_Q^1(A) = 0$ を満たす巴系イデアル Q を持つ環の特徴付けについても紹介する. 第 3 節では, 巴系イデアルの第 1 ヒルベルト係数の値が一定であるような Noether 局所環の環構造を解析する.

2. 第1ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ の消滅性と基礎環の COHEN-MACAULAY 性について

環構造を分類する上で最初の最も重要な環として, Cohen-Macaulay 環が挙げられる. 現代可換環論はこの Cohen-Macaulay 環解析を中心に急速に発展してきたと言われている.

本節ではまずこの Cohen-Macaulay 環の定義について, 巴系イデアル Q の重複度 $e_Q^0(A)$ の特徴付けによる視点から紹介する.

その前に, Noether 局所環 A 内の巴系イデアル Q に対して, 不等式

$$\ell_A(A/Q) \geq e_Q^0(A)$$

がいつも成り立つことを述べておきたい.

Cohen-Macaulay 環は次のように定義される.

定義 2.1. 環 A 内のある巴系イデアル Q について, 等式 $\ell_A(A/Q) = e_Q^0(A)$ が成り立つとき, A を Cohen-Macaulay 環であると定義する.

Cohen-Macaulay 環はさらに次の通りに特徴付けることができる. 但し, 環 A の極大イデアル \mathfrak{m} による局所コホモロジー加群を $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ ($i \in \mathbb{Z}$) と表す.

命題 2.2. $d > 0$ とする. 次の3条件は互いに同値である.

- (1) A は Cohen-Macaulay 環である.
- (2) 環 A 内の全ての巴系イデアル Q について, 等式 $\ell_A(A/Q) = e_Q^0(A)$ が成り立つ.
- (3) 任意の整数 $i \neq d$ に対して, $H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ である.

この様な, 巴系イデアル Q の重複度 $e_Q^0(A)$ による Cohen-Macaulay 環の特徴付けは良く知られている. これに対して, 第1ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ ではどのようなになっているかという問いが自然に考えられる.

ではここで, これら一連の巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の挙動研究に動きを与えた次の Vasconcelos の予想を紹介したい.

予想 2.3 ([GhHV, V]). 環 A を unmixed とする. このとき, A 内のある巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) = 0$ ならば, A は Cohen-Macaulay 環ではないか?

但し, 環 A が unmixed であるとは, 環 A の \mathfrak{m} -進完備化 \hat{A} について, 任意の $P \in \text{Ass} \hat{A}$ に対して, 等式 $\dim \hat{A}/P = d$ が成り立つことである.

もし A が Cohen-Macaulay 環ならば, A 内の全ての巴系イデアル Q について, $e_Q^1(A) = e_Q^2(A) = \cdots = e_Q^d(A) = 0$ が成り立つことが Cohen-Macaulay 環の基本構造から従う. そしてこの Vasconcelos の予想は, その逆問題に対応するものである.

また、この予想については、[GhHV, MV] に於いても部分的な解答が与えられていることも述べておきたい。

本報告の主結果の一つは次の通りである。

定理 2.4. 環 A を *unmixed* とし、 $d > 0$ とする。このとき、次の 4 条件は互いに同値である。

- (1) A は *Cohen-Macaulay* 環である。
- (2) 環 A 内の全ての \mathfrak{m} -準素イデアル I に対して、 $e_I^1(A) \geq 0$ である。
- (3) 環 A 内のある巴系イデアル Q に対して、 $e_Q^1(A) \geq 0$ である。
- (4) 環 A 内のある巴系イデアル Q に対して、 $e_Q^1(A) = 0$ である。

この定理 2.4 により、Vasconcelos の予想 2.3 への完全な解答が与えられている。証明の概要を述べると、(1) \Rightarrow (4) は、先ほど述べた、*Cohen-Macaulay* 環の基本構造から、任意の巴系イデアル Q に対して $e_Q^1(A) = 0$ が成り立つことに従う。(1) \Rightarrow (2) は成田の定理 ([Na]) から従う。(2) \Rightarrow (3) 及び、(4) \Rightarrow (3) は自明である。従って、(3) \Rightarrow (1) の証明がこの定理の本質的な部分である。

この定理 2.4 から次の系が直ちに導かれる。

系 2.5 ([MV]). *Noether* 局所環 A 内の任意の巴系イデアル Q に対して、 $e_Q^1(A) \leq 0$ が成り立つ。

この定理 2.4 を考察するに、 $e_Q^1(A) = 0$ を満たす巴系イデアル Q を含む局所環は特殊なものであることが期待できる。そして、本節ではそのような環構造の特徴付けも行いたい。

定理 2.6. $d > 0$ とする。このとき、次の 4 条件は互いに同値である。

- (1) 環 A 内のある巴系イデアル Q に対して、 $e_Q^1(A) = 0$ である。
- (2) 環 A 内の全ての巴系イデアル Q に対して、 $e_Q^1(A) = 0$ である。
- (3) \hat{A}/U は *Cohen-Macaulay* 環であって、 $\dim_{\hat{A}} U \leq d - 2$ である。但し、 $U = U_{\hat{A}}(0)$ は環 A の \mathfrak{m} -進完備化 \hat{A} 内の (0) の非混合部分を表す。
- (4) 環 A の \mathfrak{m} -進完備化 \hat{A} について、あるイデアル $I \subsetneq \hat{A}$ が存在して、 \hat{A}/I が *Cohen-Macaulay* 環であって、 $\dim_{\hat{A}} I \leq d - 2$ を満たす。

この定理 2.6 の (3) は、巴系イデアルの取り方に依らない条件であることに注意する。この条件 (3) を経由することで、(1) \Rightarrow (2)、即ち、ある巴系イデアル Q について等式 $e_Q^1(A) = 0$ が一度成り立てば、全ての巴系イデアル Q について等式 $e_Q^1(A) = 0$ が成り立つという非常に強い結果が導かれる。これこそが、この定理 2.6 の最も本質的な部分である。

本節の最後に、定理 2.6 の応用を一つ紹介したい。次の系では、環 A が unmixed を仮定していない。

系 2.7. $d > 0$ とする。 Q を環 A 内の巴系イデアルとする。 このとき、任意の整数 $1 \leq i \leq d$ について、 $e_Q^i(A) = 0$ ならば、 A は Cohen-Macaulay 環である。

3. 第 1 ヒルベルト係数の定常性と基礎環の BUCHSBAUM 性について

前節では、巴系イデアルの第 1 ヒルベルト係数の消滅性と基礎環の Cohen-Macaulay 性に関する結果を紹介してきた。これに対して、本節では、巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ の値の取り方が高々有限個であるような Noether 局所環の構造の分類を行いたい。

これから、分類を行う上で鍵となる Buchsbaum 環及び FLC を持つ環について定義を紹介するが、ここでも、巴系イデアル Q の重複度 $e_Q^0(A)$ による特徴付けの視点からの定義を採用したい。

前述の通り、一般に Noether 局所環 A 内の巴系イデアル Q に対して、不等式

$$\ell_A(A/Q) \geq e_Q^0(A)$$

が成り立ち、任意の A 内の巴系イデアル Q に対して等式 $\ell_A(A/Q) = e_Q^0(A)$ が成り立つことと、 A が Cohen-Macaulay 環であることが同値であったことに注意する。

Buchsbaum 環の定義は次の通りである。

定義 3.1. $\ell_A(A/Q) - e_Q^0(A)$ の値が一定であり、環 A 内の任意の巴系イデアル Q の取り方に依らないとき、 A を Buchsbaum 環であると定義する。

A が Buchsbaum 環ならば、任意の整数 $i \neq d$ に対して、 $\mathfrak{m} \cdot H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ が成り立つことが知られている。従って、このとき、局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ ($i \neq d$) たちは剰余体 A/\mathfrak{m} 上の有限次元ベクトル空間をなす。

Cohen-Macaulay 環とは、まさに任意の巴系イデアル Q に対して等式 $\ell_A(A/Q) - e_Q^0(A) = 0$ が成り立つ環であることを見れば、この Buchsbaum 環は Cohen-Macaulay 環の一般化に対応していることが分かる。

次に、FLC を持つ環の定義及び特徴付けは次の通りである。

定義 3.2. $\sup_L \{\ell_A(A/Q) - e_Q^0(A)\}$ が有限であるとき、 A は FLC を持つ環であると定義する。但し、集合 $L = \{Q \mid Q \text{ は } A \text{ 内の巴系イデアル}\}$ とする。

命題 3.3. $d > 0$ とする。次の 2 条件は互いに同値である。

- (1) A は FLC を持つ環である。

(2) 任意の整数 $i \neq d$ に対して, $\ell_A(H_m^i(A)) < \infty$ である.

この同値条件が成り立つとき, 等式

$$\sup_L \{\ell_A(A/Q) - e_Q^0(A)\} = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(H_m^i(A))$$

が成り立つ. 但し, 集合 $L = \{Q \mid Q \text{ は } A \text{ 内の巴系イデアル}\}$ とする.

ここで述べられている FLC とは, finitely local cohomology modules の略である. 命題 3.3 の (2) が示す通り, FLC を持つ環とはまさに局所コホモロジー加群 $H_m^i(A)$ ($i \neq d$) たちが有限生成であるような環のことである.

さらに, 環 A が FLC を持つ場合に, A 内の巴系イデアル Q が等式

$$\ell_A(A/Q) - e_Q^0(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(H_m^i(A))$$

を満たすとき, Q は標準的な巴系イデアルであるという ([STC]).

この標準的な巴系イデアルは, FLC を持つ環の中で非常に強い性質を持っていて, 環 A が FLC を持つならば, 十分大きい整数 ℓ に対して, 極大イデアルの冪 m^ℓ に含まれる巴系イデアルは全て標準的であることも知られている (cf. [Sch, STC]). そして, Buchsbaum 環とは, FLC を持っていてかつ, 任意の巴系イデアルが標準的であるような環であると言える.

以上のような, 巴系イデアル Q の重複度 $e_Q^0(A)$ を用いた Buchsbaum 環及び FLC を持つ環の特徴付けは非常に良く知られているが, ここでも, 巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ による特徴付けが期待される.

そこで以下, 集合

$$\Lambda = \Lambda(A) = \{e_Q^1(A) \mid Q \text{ は環 } A \text{ 内の巴系イデアル}\}$$

を定める.

ここで, 次の 2 つの問いを考えたい.

問題 3.4. A を Noether 局所環とする.

- (1) いつ Λ が有限集合をなすか?
- (2) いつ Λ が一点集合をなすか?

前節の定理 2.6 によると, 次の同値条件が従う.

注意 3.5. $0 \in \Lambda \Leftrightarrow \Lambda = \{0\}$.

ではこれより，問題 3.4 に取り組むにあたって必要な，これまでに知られている結果を紹介したい．その際に， $d = 1$ のときにはいつも等式 $e_Q^1(A) = -\ell_A(H_m^0(A))$ が成り立つことから，この問題については $d \geq 2$ の場合が本質的となるということを述べておきたい．

以下，整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して， $h^i(A) = \ell_A(H_m^i(A))$ を環 A の局所コホモロジー加群の長さとする．

命題 3.6. 環 A が FLC を持つとし， $d \geq 2$ とする． Q を環 A 内の巴系イデアルとする．このとき，次が正しい．

- (1) ([GN]) 不等式 $e_Q^1(A) \geq -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$ が成り立つ．
- (2) ([Sch]) Q が標準的ならば，等式 $e_Q^1(A) = -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$ が成り立つ．

系 2.5 によると，巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数について不等式 $e_Q^1(A) \leq 0$ が一般 Noether 局所環内に於いて成り立つ．これに対して，環 A が FLC を持つとき，命題 3.6 の (1) より，不等式

$$0 \geq e_Q^1(A) \geq -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$$

が成り立つ．このことから，環 A が FLC を持つならば， Λ は有限集合をなすことが得られる．

また，巴系イデアル Q が標準的ならば命題 3.6 の (2) により，等式

$$e_Q^1(A) = -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$$

が従う．よって， A が Buchsbaum 環ならば， A 内の全ての巴系イデアル Q は標準的であることから，

$$\Lambda = \left\{ -\sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A) \right\}$$

となり， Λ は一点集合をなすことが分かる．そして，これらは全て逆の主張も正しいのではないかという自然な問いが与えられる．

Λ の有限性について，次の結果が得られた．

定理 3.7. 環 A を *unmixed* とし， $d \geq 2$ とする． Λ を有限集合と仮定し，整数 $\ell = -\min \Lambda$ と定める．このとき，任意の整数 $i \neq d$ に対して， $m^\ell \cdot H_m^i(A) = (0)$ が成り立つ．従って，このとき $H_m^i(A)$ ($i \neq d$) は有限生成であり， A は FLC を持つ環である．

本節の主結果は次の通りである．

定理 3.8. 環 A を *unmixed* とし, $d \geq 2$ とする. このとき, 次の 2 条件は互いに同値である.

- (1) A は *Buchsbaum* 環である.
- (2) 環 A 内の巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ は一定値をとり, Q の取り方に依らない. 即ち, Λ が一点集合である.

この同値条件のどちらかが成り立つとき, A の任意の巴系イデアル Q に対して, 等式

$$e_Q^1(A) = - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$$

が成り立つ.

この定理 3.8 について, $(1) \Rightarrow (2)$ 及び最後の条件は前述の議論から従う. よって, 本報告では $(2) \Rightarrow (1)$ の証明を紹介したい. その上で, 次の命題が鍵となる.

命題 3.9. 環 A は *FLC* を持つとし, $d \geq 2$, $\text{depth} A > 0$ とする. Q は環 A 内の巴系イデアルとする. このとき, 等式 $e_Q^1(A) = - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A)$ が成り立つならば, Q は標準的な巴系イデアルをなす.

それでは, 定理 3.8 の証明の概略を紹介したい.

定理 3.8 の証明 $(2) \Rightarrow (1)$. Λ が一点集合であることから, 定理 3.7 より, 環 A は *FLC* を持つ. 環 A が *FLC* を持つならば, A 内に標準的な巴系イデアルは必ず含まれるので,

$$- \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A) \in \Lambda$$

が従う. そして, ここでも Λ が一点集合であることから,

$$\Lambda = \left\{ - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(A) \right\}$$

が成り立つ. 従って, 命題 3.9 により, A 内の全ての巴系イデアル Q が標準的であることが導かれる. 以上より, A は *Buchsbaum* 環をなす. □

このように, 巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $e_Q^1(A)$ により, *Buchsbaum* 環を特徴付けることができた. これは *Buchsbaum* 環の新しい特徴付けである.

一方で, この定理 3.8 は環 A が *unmixed* でない場合には成り立たない. そのような例を一つ紹介する.

例 3.10. B を正則局所環とし, $d = \dim B \geq 3$ とする. 環 B の正則巴系を X_1, X_2, \dots, X_d とする. Noether 局所環 $A = B \ltimes B/(X_1, X_2, \dots, X_{d-1})$ を B 上の剰余環 $B/(X_1, X_2, \dots, X_{d-1})$ によるイデアル化と定める. このとき, 次が正しい.

- (1) 環 A は unmixed ではなく, $\dim A = d$ であって, $\text{depth } A = 1$ である.
- (2) 任意の A 内の巴系イデアル Q に対して, $e_Q^1(A) = 0$ である. 即ち, $\Lambda = \{0\}$ である.
- (3) 環 A は FLC を持たない. 特に, $H_m^1(A)$ は有限生成ではない.

本報告の最後に, Λ が一点集合であるような Noether 局所環の特徴付けを紹介したい.

定理 3.11. $d \geq 2$ とする. このとき, 次の条件は互いに同値である.

- (1) Λ は一点集合である.
- (2) 環 A の m -進完備化 \hat{A} 内の (0) の非混合要素を $U = U_{\hat{A}}(0)$ を定める. このとき, $\dim_{\hat{A}} U \leq d - 2$ であって, \hat{A}/U は Buchsbaum 環である.

この同値条件のどちらかが成り立つとき, A 内の任意の巴系イデアル Q に対して, 等式

$$e_Q^1(A) = - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-2}{i-1} h^i(\hat{A}/U)$$

が成り立つ.

REFERENCES

- [GhGHOPV] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, *Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals*, J. London Math. Sci., to appear.
- [GhHV] L. Ghezzi, J. Hong and W. V. Vasconcelos, *The signature of the Chern coefficients of local rings*, Math. Research Letters, **16** (2009), 279–289.
- [GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra **181** (2003), 61–74.
- [GO] S. Goto and K. Ozeki, *Buchsbaumness in local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters*, Nagoya Math. J., to appear.
- [MV] M. Mandal and J. K. Verma, *On the Chern number of an ideal*, Preprint 2008.
- [Na] M. Narita, *A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semi-regular rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **59**, 1963, 269–275.
- [Sch] P. Schenzel, *Multiplizitäten in verallgemeinerten Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr. **88** (1979), 295–306.
- [STC] P. Schenzel, N. V. Trung, and N. T. Cuong, *Verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr., **85** (1978), 57–73.
- [V] W. V. Vasconcelos, *The Chern coefficients of local rings*, Michigan Math. J. **57** (2008), 725–743.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, MEIJI UNIVERSITY,
1-1-1 HIGASHI-MITA, TAMA-KU, KAWASAKI 214-8571, JAPAN
E-mail address: kozeki@math.meiji.ac.jp