

# Central 2-arrangement 上の微分作用素環のネター性 について

中島規博（北大・理）

2010.3

## 1 序文

Holm は [2] で Central arrangement の座標環に関する微分作用素環の研究を行った．特に，超平面配置が Generic なときの微分作用素環の代数としての生成元を与えた．しかし，微分作用素環の性質について深く研究はされていない．また，Central 2-arrangement の座標環に関する微分作用素環の各階数による斉次成分の左  $S$ -加群としての基底が [5] により与えられた．この基底に関する微分作用素環の表示を使って，Central 2-arrangement の座標環に関する微分作用素環がネター環であることが証明できた．今回，二変数の Central arrangement の座標環に関する微分作用素環のネター性について講演する．また，微分作用素環については [1], [3] などに，超平面配置 (Arrangements of Hyperplanes) については [4] に重要な研究結果が記述されている．

## 2 微分作用素環と Weyl 代数

$S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を  $n$  変数多項式環とする．また  $\text{End}_{\mathbb{C}}(S)$  を  $S$  の自己準同型環とする．任意の  $i = 1, \dots, n$  に対して  $x_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ ,  $\partial_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$  を

$$x_i(f) = x_i f, \quad \partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (f \in S)$$

で定義される作用素とする． $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$  で生成される  $\mathbb{C}$ -代数  $A_n = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$  を  $n$  次の Weyl 代数という． $A_n$  の生成元  $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$

には

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij} \cdot 1, [x_i, x_j] = 0, [\partial_i, \partial_j] = 0 \quad (2.1)$$

という関係式が成り立つ．ここで  $[\theta, \eta] = \theta\eta - \eta\theta$  であり， $\delta_{ij}$  は Kronecher delta である．

命題 2.1. 集合  $B = \{x^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$  は  $A_n$  の  $\mathbb{C}$  上の基底を成す．

命題 2.1 より任意の  $\theta \in A_n$  は一意に

$$\theta = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

と表される．この表示を  $\theta$  の標準形 (nomal form) といい， $x^\alpha \partial^\beta$  を  $A_n$  の単項式という．この表示により，ただちに

$$A_n = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^n} S \partial^\beta \quad (2.2)$$

であることがわかる．微分作用素  $\theta = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \in A_n$  に対して  $\theta$  の単項式の係数が 0 でない  $\beta$  の中で最大の  $|\beta|$  を  $\theta$  の階数 (order) といい， $\text{ord}(\theta)$  と書く．ただし，特別に  $\text{ord}(0) = -\infty$  とする．

次に，微分作用素環を以下のように帰納的に定義する．

定義 2.2. 可換  $\mathbb{C}$ -代数  $R$  に対して， $R$  の微分作用素環  $D(R)$  を以下で帰納的に定義する：

$$\begin{aligned} D^0(R) &= \{\theta \in \text{End}_{\mathbb{C}}(R) \mid a \in R, [\theta, a] = 0\}, \\ m \geq 1, \quad D^m(R) &= \{\theta \in \text{End}_{\mathbb{C}}(R) \mid a \in R, [\theta, a] \in D^{m-1}(R)\}, \\ D(R) &= \bigcup_{m \geq 0} D^m(R). \end{aligned}$$

微分作用素環  $D(R)$  は環構造を持つことがわかっている．また古典的な結果により，多項式環  $S$  に関する微分作用素環  $D(S)$  は Weyl 代数であることもよく知られている．すなわち，

命題 2.3.  $D(S) = A_n$  である．

ここで  $D^{(m)}(S) = \bigoplus_{|\beta|=m} S \partial^\beta$  とおくと，(2.2) より Weyl 代数を

$$D(S) = \bigoplus_{m \geq 0} D^{(m)}(S)$$

と階数の斉次成分による直和分解することができる．

$I$  を  $S$  のイデアルとする． $I$  を保存する微分作用素全体を考えると環構造を成す．

定義 2.4.  $S$  のイデアル  $I$  に対して，

$$\Delta(I) = \{\theta \in D(S) \mid \theta(I) \subseteq I\}$$

と定義する． $\Delta(I)$  は  $D(S)$  の部分環である．

$\Delta(I)$  を使って  $S/I$  の微分作用素環を Weyl 代数の部分商として表示できる．

命題 2.5.  $I$  を  $S$  のイデアルとする．このとき  $S/I$  の微分作用素環は剰余環  $\Delta(I)/ID(S)$  と  $\mathbb{C}$ -代数として同型である．

### 3 Central arrangement 上の微分作用素環

Holm は [2] で Central arrangement の座標環に関する微分作用素環の研究を行った．下の命題は [2, Proposition 4.3.] による．

命題 3.1.  $p_1, \dots, p_r \in S$  をそれぞれ互いに素な斉次一次多項式とする．また  $Q = p_1 \cdots p_r$  において， $I = QS$  とすると

$$\Delta(I) = \bigoplus_{m \geq 0} \Delta^{(m)}(I)$$

である．ただし， $m \geq 0$  に対して  $\Delta^{(m)}(I) = \{\theta \in D^{(m)}(S) \mid \theta(I) \subseteq I\}$  とする．

また，与えられたいくつかの  $\Delta(I)$  の階数において斉次な作用素が  $\Delta(I)$  の斉次成分の左  $S$ -加群としての基底であるかどうかを判定できる [5, Theorem 4.10.]．特に  $n = 2$  のとき， $\Delta(I)$  の各階数の斉次成分の左  $S$ -加群としての基底が一つ与えられる [5, Proposition 4.14.]．この基底による  $\Delta(I)$  の左  $S$ -加群としての表示が可能である．この表示と命題 2.5 により，微分作用素環  $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$  の元の具体的な計算が可能になる．ここで，任意の  $i = 1, \dots, r$  に対して

$$L_i = \Delta(I) \cap (p_1 \cdots p_i)D(S)$$

と定義する．このとき  $L_i$  は  $\Delta(I)$  の両側イデアルであることがわかり，また  $\Delta(I)$  の両側イデアルの列

$$ID(S) = L_r \subseteq L_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq L_1 \subseteq L_0 = \Delta(I)$$

の各剰余  $L_{i-1}/L_i$  のネター性を調べることで以下のことを証明した .

**定理 3.2.**  $r \geq 1$  を整数とする .  $i = 1, \dots, r$  に対して  $p_i \in \mathbb{C}[x, y]$  を斉次一次多項式として ,  $p_1, \dots, p_r$  はそれぞれ互いに素であるとする . また  $I = \langle p_1 \cdots p_r \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y]$  とする . このとき , 環  $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$  は右ネターかつ左ネターである .

一方で  $r \geq 2$  のとき , この環  $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$  をオーダー・フィルターによって次数化した環はネター環ではない .

**例 3.3.**  $S = \mathbb{C}[x, y]$  として  $I = xyS$  を  $xy$  で生成される  $S$  のイデアルとする . このとき , 任意の  $m \geq 1$  に対して

$$x_1 \partial_1^m \in \Delta(I) , \quad \partial_1^m \notin \Delta(I)$$

である . したがって , 微分作用素環  $D(\mathbb{C}[x, y]/I)$  をオーダー・フィルターによって次数化した環  $\text{Gr}(D(\mathbb{C}[x, y]/I))$  上  $\{x_1 \partial_1^m \mid m \geq 1\}$  で生成されるイデアルは有限生成ではない .

## 参考文献

- [1] S. C. Coutinho, *A Primer of Algebraic D-modules*. London Mathematical Society Student Texts 33, 1995.
- [2] Pär Holm, *Differential Operators on Hyperplane Arrangements*. Comm. Algebra 32 (2004), no.6, 2177-2201.
- [3] J. C. McConnell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*. Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, 1987.
- [4] Peter Orlik and Hiroaki Terao, *Arrangements of Hyperplanes*. Grundlehren der-mathematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, 1992.
- [5] Jan Snellman, *A Conjecture on Pioncaré-Betti Series of Modules of Differential Operators on a Generic Hyperplane Arrangement*. Experiment. Math. 14 (2005), no.4, 445-456.