FROBENIUS CONDITION ON A PRETRIANGULATED CATEGORY

HIROYUKI NAKAOKA

As shown in [H], from any Frobenius exact category, we can construct a triangulated category as a stable category. On the other hand, it was shown in [IY] that if a pair of subcategories $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Z}$ in a triangulated category satisfies certain conditions (namely, $(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$ is a $\mathcal{D}$-mutation pair), then $\mathcal{Z}/\mathcal{D}$ becomes a triangulated category. In this talk, we will make a simultaneous generalization of these two constructions.

We define a *pretriangulated category* as a quintet $(\mathcal{C}, \Sigma, \Omega, \lhd, \rhd)$ of an additive category $\mathcal{C}$, additive endofunctors $\Omega, \Sigma \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, and classes of right and left triangles $\rhd$, $\lhd$, satisfying some conditions similar to those in [BR]. We often represent a pretriangulated category simply by $\mathcal{C}$. With this definition, a triangulated category is a pretriangulated category with $\Omega \cong \Sigma^{-1}$, and any abelian category can be regarded as a pretriangulated category satisfying $\Sigma = \Omega = 0$.

In a pretriangulated category, we can define a *short exact sequence*

$$\Omega C \to A \to B \to C \to \Sigma A,$$

which generalize a short exact sequence in an abelian category and a distinguished triangle in a triangulated category. With this definition, we can consider *extension-closedness* of a subcategory $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$.

For a triplet $(\mathcal{C}, \mathcal{Z}, \mathcal{D})$ of a pretriangulated category $\mathcal{C}$, an extension-closed subcategory $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ and a subcategory $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Z}$ satisfying $\mathcal{C}(\mathcal{Z}, \Sigma\mathcal{D}) = \mathcal{C}(\Omega\mathcal{D}, \mathcal{Z}) = 0$, we can define the class of *injective objects* $\mathcal{I}$ and that of *projective objects* $\mathcal{P}$.

	Happel's construction [H]	Iyama and Yoshino's construction [IY]
$\mathcal{C}$	abelian category	triangulated category
$\mathcal{Z}$	exact subcategory	extension-closed subcategory
$\mathcal{D}$	$\mathcal{Z} = \mathcal{D}$	$(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$: $\mathcal{D}$-mutation pair
$\mathcal{I}$	injective objects	$\mathcal{I}$=$\mathcal{D}$
$\mathcal{P}$	projective objects	$\mathcal{P}$=$\mathcal{D}$

We impose 'Frobenius condition' (including $\mathcal{I} = \mathcal{P} =: \mathcal{F}$) on the triplet $(\mathcal{C}, \mathcal{Z}, \mathcal{D})$, and will show the following.

Theorem . Let $\mathcal{C}$ be a pretriangulated category, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ be an extension-closed subcategory, and $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Z}$ be a triangulator. If $(\mathcal{C}, \mathcal{Z}, \mathcal{D})$ is Frobenius, then $\mathcal{Z}/\mathcal{F}$ becomes a triangulated category.

References

[BR] Beligiannis, A; Reiten, I: *Homological and homotopical aspects of torsion theories.* (English summary) Mem. Amer. Math. Soc. **188** (2007), no. 883, viii+207 pp.

[H] Happel, D: *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras.* London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. x+208 pp.

[IY] Iyama, O; Yoshino, Y: *Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules.* (English summary) Invent. Math. **172** (2008), no. 1, 117–168.

E-mail address, Hiroyuki NAKAOKA: deutsche@ms.u-tokyo.ac.jp

THICK SUBCATEGORY AND AUSLANDER CONDITION

TOKUJI ARAYA

Through in this talk, let R be a commutative Noetherian local ring, $\mathfrak{m}$ be the unique maximal ideal of R and $k = R/\mathfrak{m}$ be the residue class field. We denote by $\operatorname{mod} R$ the category of finitely generated R-modules.

Definition 1. (1) For finitely generated R-modules M and N, $\mathrm{P}_R(M,N)$ and $\mathrm{P}_R(M)$ are defined as follows;

$$\mathrm{P}_R(M,N) = \sup\{n \mid \operatorname{Ext}_R^n(M,N) \neq 0\}$$
$$\mathrm{P}_R(M) = \sup\{\mathrm{P}_R(M,N) \mid \mathrm{P}_R(M,N) < \infty,\ N \in \operatorname{mod} R\}$$

(2) A finitely generated R-module M satisfies *Auslander condition (AC)* if $\mathrm{P}_R(M) < \infty$.
(3) R is *AC* if there exists an integer n such that $\mathrm{P}_R(M) \leq n$ for all finitely generated R-modules M.

For non-negative integer n, we put $\mathcal{A}_n$ the full subcategory of $\operatorname{mod} R$ consisting of all modules M with $\mathrm{P}_R(M) \leq n$. It is easy to see that R is AC if and only if $\mathcal{A}_n = \operatorname{mod} R$ for some n. We want to know that $\mathcal{A}_n$ is thick or not in general case. The following theorem is the main theorem of this talk.

Theorem 2. *The following conditions are equivalent.*
(1) *R is AC.*
(2) *$\mathcal{A}_n = \operatorname{mod} R$ for some $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*
(3) *$\mathcal{A}_n$ is thick for some $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Nara University of Education, Takabatake-cho, Nara 630-8528, Japan
E-mail address: araya@math.okayama-u.ac.jp

可算表現型の超曲面について

飯間 圭一郎 （岡山大学大学院自然科学研究科）

この講演の内容は, 荒谷督司氏, 高橋亮氏との共同研究に基づくものである.

この講演を通して, k を標数 0 の代数閉体とし, R を体 k 上の完備な超曲面とする. 有限生成 R 加群全体のなす圏を $\mathrm{mod}(R)$ と表わし, 極大 Cohen-Macaulay R 加群全体のなす充満部分圏を $\mathrm{CM}(R)$, その安定圏を $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ と表わす.

R が有限表現型であるとき, R は剰余環 $k[[x_0, x_1, x_2, \dots, x_d]]/(f)$,

$$f = \begin{cases} x_0^2 + x_1^{n+1} + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (A_n)\ (n \geq 1) \\ x_0^2 x_1 + x_1^{n-1} + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (D_n)\ (n \geq 4) \\ x_0^3 + x_1^4 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_6) \\ x_0^3 + x_0 x_1^3 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_7) \\ x_0^3 + x_1^5 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_8) \end{cases}$$

と同型である. このとき, $\mathrm{CM}(R)$ の全ての対象と射が完全に分類されている. すなわち, $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ の AR-クイバーが与えられている ([1,3,4,5] を参照). R が可算無限表現型であるとき, R は剰余環 $k[[x_0, x_1, x_2, \dots, x_d]]/(f)$,

$$f = \begin{cases} x_0^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (A_\infty^d) \\ x_0^2 x_1 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (D_\infty^d) \end{cases}$$

と同型である. このとき, $\mathrm{CM}(R)$ の全ての対象は完全に分類されているが, 射については全ては分類されていない ([1,2,4] を参照). この講演の目的は $\mathrm{CM}(R)$ の対象の間の関係を調べることである.

極大イデアル以外の素イデアルで局所化したときに自由である R 加群全体のなす $\mathrm{CM}(R)$ の充満部分圏を $\mathcal{P}(R)$ と表わす. 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群 X で, $X \notin \mathcal{P}(R)$ をみたす加群の同型類全体のなす集合を $\mathcal{M}(R)$ とおく. さらに X の非自由軌跡を $\mathcal{V}(X)$ とおく.

この講演の主結果は次の定理である．

定理 1 R は可算無限表現型であるとする．$\mathfrak{p}_R = (x_0, x_2, \ldots, x_d)$, $\mathfrak{m}_R = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d)$ とおく．このとき，次の条件をみたす極大 Cohen-Macaulay 加群 X_R が存在する．

(1) $\mathcal{M}(R) = \{X_R, \Omega X_R\}$

(2) $\mathcal{V}(X_R) = \mathcal{V}(\Omega X_R) = \{\mathfrak{p}_R, \mathfrak{m}_R\}$

(3) 各 $M \in \mathcal{P}(R)$ に対し，

$$0 \to L \to M \oplus R^n \to N \to 0$$

$(L, N \in \{X_R, \Omega X_R\},\ n \in \mathbb{N}_0)$ をみたす完全列が存在する．

参考文献

[1] R.-O. Buchweitz.; G.-M. Greuel.; F.-O. Schreyer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities II. *Invent. math.* **88** (1987), 165–182.

[2] I. Burban.; Y. Drozd. Maximal Cohen-Macaulay modules over surface singularities. *Trends in Representations of Algebras and Related Topics.* EMS Publishing House, 101–166, 2008.

[3] H. Knörrer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I. *Invent. math.* **88** (1987), 153–164.

[4] F.-O. Schreyer. Finite and countable CM-representation type, Singularities, representation of algebras, and vector bundles. *Springer Lecture Notes in Math.* **1273** (1987), 9–34.

[5] Y. Yoshino. *Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings.* London mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

ジョンソン・スキームの隣接代数のモジュラー表現について

前川 悠 (信州大学工学系研究科)

アソシエーション・スキームは元々, 組み合わせ論的な研究対象であるから, その研究は組み合わせ論的な手法によるものが多い。しかし、多くの組み合わせ論的な議論は扱う集合が大きくなるともはや手に負えないほど複雑で難しくなる。そこでアソシエーション・スキームから自然に得られる隣接代数という代数の線型表現を考える。

隣接代数は, 群環と似ていて, 標数 0 の体上では半単純, 正標数ではそうとは限らない。ここでは正標数, 特に素体上の表現を考える。正標数の場合は隣接代数に関する理論が確立しておらず, 何もわかっていないのが現状である。しかし, 隣接代数は有限次元代数であり, ハミング・スキームやジョンソン・スキームといったパラメータがわかっている対称なアソシエーションスキームには有用な基底が存在し, それを用いて具体的に計算をすることができる。

ハミング・スキームに関しては吉川昌慶氏が完全決定を行った。私はジョンソン・スキームに対して同様の議論を行い, モジュラー表現の理論を構築したい。

ジョンソン・スキームの隣接代数 $F \cdot \mathrm{J}(m,n)$ の計算のしやすい F -基底を $\{C_i | i = 0, \cdots, n\}$ と存在する。以下の定理はその F -基底に関するものである。

定理 1. [Maekawa,Yoshikawa] p を素数とし、 t を自然数とする。この時以下が成立する。

$$F \cdot \mathrm{J}(2(p^t-1), p^t-1) \cong F \cdot \mathrm{J}(2(p-1), p-1)^{\otimes t}$$

定理 2. [Maekawa,Yoshikawa] m を自然数, $0 \leq n \leq \frac{m}{2}$ とし, $\{C_i | 0 \leq i \leq n\}$ を $F \cdot \mathrm{J}(m,n)$ の基底, $\{C'_j | 0 \leq j \leq n-1\}$ を $F \cdot \mathrm{J}(m-2, n-1)$ の基底とする。この時, f を,

$$f : F \cdot \mathrm{J}(m,n) \to F \cdot \mathrm{J}(m-2,n-1) \ \left(C_i \mapsto \begin{cases} C'_{i-1} & (1 \leq i \leq n) \\ 0 & (i = 0) \end{cases} \right) \ (F\text{-線形写像})$$

と定めると f は 全射多元環準同型写像 となる。

定理 3. [Maekawa,Yoshikawa] ジョンソン・スキーム $\mathrm{J}(m,n)$ を考える。 i を $\min\{\alpha \in \mathbb{N} | n < p^\alpha\}$ を満たす i とする。この時、$m = kp^i + q$ となる自然数 k と $0 \leq q < p^i$ が存在し

$$F \cdot \mathrm{J}(m,n) = F \cdot \mathrm{J}(kp^i + q, n) \cong F \cdot \mathrm{J}(p^i + q, n)$$

が言える。

今回の発表では, これらの定理を紹介しこれからの研究の展望を述べる。

QUADRATIC ALGEBRAS IN TWO VARIABLES

上山健太 (静岡大学大学院理学研究科)

k を代数的閉体とする．$X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ を有限集合，$k\langle X\rangle$ を X で生成された k 上自由代数，$I \subset k\langle X\rangle$ をイデアルとする．I が次数 2 の斉次な関係式によって生成されているとき，$A = k\langle X\rangle/I$ を quadratic algebra という．本研究の目的は 2 変数 quadratic algebra，つまり

$$k\langle x, y\rangle/(f_1, \cdots, f_r), \quad \deg f_i = 2 \text{ for all } i$$

を次の二つの段階で分類することである．

(1) 次数付き代数としての同型を除いて分類する．

(2) 次数付き加群の圏としての同値（次数付き森田同値）を除いて分類する．

2 変数 quadratic algebra の分類は関係式の数 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ により五つの場合に分けられ，$r = 0$ と $r = 4$ の場合は自明なものしかない．また $r = 1$ の場合の分類結果は知られている．$r = 3$ の場合は $r = 1$ の場合の quadratic dual を利用して分類される．本講演では主に $r = 2$ の場合の分類手法や分類結果について述べる．

$A = k\langle X\rangle/I, B = k\langle X\rangle/J$ を n 変数 quadratic algebra とする．このとき

- 次数付き代数として $A \cong B$?
- $\mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, B$?

という問いは一般に難しい．そこで Artin, Tate, Van den Bergh [1] によって導入された point scheme という概念を用いると，この問いに対して幾何的にアプローチすることができる．A, B の point scheme をそれぞれ $\Gamma_A, \Gamma_B \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ とすると次が成り立つ．

$$\begin{array}{ccl} A \cong B & \Longrightarrow & \exists \sigma \in \mathrm{Aut}_k\, \mathbb{P}^{n-1} \text{ such that } \Gamma_B \xrightarrow[\sim]{\sigma\times\sigma} \Gamma_A \\ \Downarrow & & \\ \mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, B & \Longrightarrow & \exists \sigma, \tau \in \mathrm{Aut}_k\, \mathbb{P}^{n-1} \text{ such that } \Gamma_B \xrightarrow[\sim]{\sigma\times\tau} \Gamma_A \end{array}$$

これにより point scheme の分類を quadratic algebra の分類に活かすことができる．2 変数 quadratic algebra の場合，この幾何による分類はかなり効果的である．実際，$r = 2$ の場合は point scheme の分類を主に用いることで分類が完成した．

References

[1] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some Algebras Associated to Automorphisms of Elliptic Curves, The Grothendieck Festschrift Vol. **1** Birkhauser, (1990), 33-85.

[2] K. Ueyama, Geometric classification of quadratic algebras in two variables, Tsukuba J. Math., accepted.

[3] I. Mori, Noncommutative Projective Schemes and Point Schemes, Algebras, Rings and Their Representations, World Sci. Publ. (2006), 215-239.

Bernoulli-type relations
in some noncommutative polynomial ring

村田駿祐（筑波大学数理物質科学研究科）

K を標数 0 の体とし，$K[x,y]$ を x,y からなる 2 変数非可換多項式環とする．また $I = \langle xy - yx - x \rangle$ を $xy - yx - x$ から生成される $K[x,y]$ のイデアルとし，$A = K[x,y]/I$，すなわち非可換多項式環 $K[x,y]$ をイデアル I で割った剰余環とする．以後，A における元 $\bar{x} = x + I$，$\bar{y} = y + I$ を（記号を流用して）それぞれ x，y と表記する．このとき，次の事実が成り立つ．

定理 1. (Bernoulli-type relations)

A を上のように定義し，A の元 $w_{k,\ell}$ を

$$w_{k,\ell} = (xy^k - y^k x)x^\ell \in A \quad (k \geq 1, \ell \geq 0)$$

とおく．このとき，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned} xw_{k,\ell} &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} w_{i,\ell+1} \\ yw_{k,\ell} &= \frac{k}{k+1} w_{k+1,\ell} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i} B_{k+1-i} w_{i,\ell} \end{aligned}$$

□

ここで $\binom{k}{i}$ は 2 項係数であり，B_n は $B_1 = 1/2$ をとるベルヌーイ数である．この関係式を "Bernoulli-type relations" と呼ぶことにする．今回の講演ではこの Bernoulli-type relations に関係する結果についてお話します．

References

[1] S. Murata, *Bernoulli-type Relations in Some Noncommutative Polynomial Ring*, arXiv:0912.1711

On AS-regular algebras (joint work with Izuru Mori)

Hiroyuki Minamoto

Let k be a field.

Definition 0.1. *A connected* $\mathbb{N}$*-graded algebra* $A = k \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ *is called AS-regular if it has finite global dimension* $d := \mathrm{gl.dim}\,\mathrm{Gr}\,A < \infty$ *and satisfies the following Gorenstein property:*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\mathrm{Gr}\,A}(k_A, A) \cong \begin{cases} k(e) \text{ for some } e \in \mathbb{Z} & q{=}d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The integer e *is called Gorenstein parameter.*

Remark 0.2. *In some paper these algebras are called regular algebra. In Artin-Schelter's original definition* [AS]*, (AS-)regular algebras defined by three conditions: above two conditions and finiteness of Gelfand-Kirillov dimension.*

Artin - Schelter defined AS-regular algebras to give a good class of graded algebras. Definition of AS-regular algebra extracts good homological property of polynomial algebras. Using noncommutative projective schemes and its derived category, we give a structure theorem of AS-regular algebras. This theorem shows that AS-regular algebras are polynomial algebras in some sense. We give some application of our structure theorem. We also discuss a generalization of AS-regular algebra in the case when a graded algebra is not connected over the base field k.

References

[AS] M. Artin, and W.F. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, Adv. Math. **66** (1987), pp. 171-216.

不定値二元二次形式の類数和に関する漸近公式について

橋本康史（九州先端科学技術研究所）, hasimoto@isit.or.jp

原始的不定値二元二次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同値類と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の素な双曲的共役類との間には 1 対 1 の対応があり，また，二次形式の基本単数が，対応する $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の共役類の固有値の大きい方に一致することが知られている（Gauss）．このことから，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する素測地線定理（Hejhal, Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** などを参照）を二次形式の言葉で記述しなおすことで，次の漸近公式が得られる（Sarnak, J. Number Theory, **15**, pp. 229-247, 1982）.

$$\sum_{D\in\mathfrak{D},\epsilon(D)<x} h(D) \sim \mathrm{li}(x^2).$$

ここで，$\mathrm{li}(x) := \int_2^x (\log t)^{-1}dt \sim x/\log x$ で，$h(D), \epsilon(D)$ はそれぞれ判別式 $D>0$ に関する狭義の類数と基本単数である．これは，ガウスが予想し，ジーゲル（Ann. of Math. II, **45**, pp. 667-685, 1944) によって証明が与えられた，

$$\sum_{D\in\mathfrak{D},D<x} h(D)\log\epsilon(D) \sim \frac{\pi^2}{18\zeta(3)}x^{3/2}$$

の和をとる順番を取り替えたものであり，類数や基本単数の分布を調べるうえで，興味深い比較対象であるといえる．

本稿の筆者は，以前 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群に関する素測地線定理を利用して，

$$\sum_{p|D,\epsilon(D)<x} h(D), \qquad \sum_{(D/p)=1,\epsilon(D)<x} h(D)$$

のような，$\{D\}$ の部分集合にわたる類数和の増大度に関する研究を行った（arXiv.math/0807.0056）．しかしながら，すでに，Raulf (Forum Math. **21**, pp. 221-257, 2009) によって，

$$\sum_{D\equiv a \bmod n,\epsilon(D)<x} h(D) = C_{n,a}\mathrm{li}(x^2) + O(x^{2-\epsilon})$$

が示されていた．なお，この証明の中では，素測地線定理は全く用いられていない．類数公式を利用して，問題を，ディリクレ L 関数の 1 での値の値の和の評価を行う，という形に書き換える，という方針で証明がなされている．この中では，非常に労力を要する計算が丁寧になされていて，主要項の係数 $C_{n,a}$ まで，きちんと記述されている．ただ，$C_{n,a}$ の表示のし方は複雑で，具体的にどんな値かを知りたいと思っても，そのためにさらに面倒な計算をする必要があるため，はっきりと実体をつかみにくい．

本講演では，この係数をよりシンプルな形で記述しなおすこと，そして，誤差項についてもそれなりの評価を与えることを目標にする．

実二次体の類数に関するByeonの結果についての注意

伊東 杏希子 (名古屋大学大学院 多元数理科学研究科)

代数的整数論の重要なキーワードの一つにイデアル類群がある. イデアル類群は代数体ごとに決まる群であり, その位数 (類数という) が有限であることが知られている. 代数体の類数に関する考察テーマは数多くあるが, 本講演では主に, 実二次体の類数の非可除性に関する Byeon の結果についての Remark を報告する.

与えられた素数 l に対して, 類数が l で割れない実二次体は無限に存在する (虚二次体についても同様の主張が成り立つ). 特に $l=3$ の場合には, 類数が 3 で割れない実二次体は無限に存在することだけでなく, 正の下極限密度を持つことも知られている (虚二次体についても同様の主張が成り立つ). 類数が 3 で割れない実二次体について, Byeon により次が示されている.

定理 1. (Byeon, 2004). *t を square-free な整数とする. 二次体の基本判別式 $D>0$ のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{tD})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.*

二次体の基本判別式 $D>0$ のうち $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ の類数が 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことがDavenport-Heilbronn, 中川-堀江氏の結果から分かる. 二次体のイデアル類群の 3-rank に関して知られている Scholz 不等式をこの結果に組み合わせることで, 二次体の基本判別式 $D>0$ のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことが言える. Byeon の結果はこの事実の一般化と見ることができる.

定理 1 に対して, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2D})$ の三つの実二次体の組 (ただし, $t_1>0$, $t_2>0$ は square-free な奇数でかつ $t_1 \neq t_2$ を満たす) についても同様の結果が得られるかという考察に取り組んだので, その内容について紹介する. さらに, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2D})$ での 3 の分解の仕方を考えることにより, 岩澤不変量がすべて 0 となる実二次体の組 ($\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2D})$) が無限に存在し, 正の下極限密度を持つことについても触れたい.

線形の微分方程式に関するガロア理論とその応用について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　博士後期課程 1 年

斎藤　克典

代数方程式のガロア理論があるのと同様に, 微分方程式や差分方程式に対してもガロア理論が構成されている. したがって代数方程式の場合と同様にガロア群を見ることで方程式の解の”難しさ”というものを測ることができる.
例えば次のような $\mathbb{C}$ 上の微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= & y \\ \frac{dy}{dt} &= & -x \end{cases}$$

では解を exp を使って書くことができる. (例えば $x = \exp\sqrt{-1}t, y = -\exp\sqrt{-1}t$) この場合ガロア群は, 可換な代数群 $\mathbf{G}_m \simeq \mathbb{C}^\times$ になる。力学系の中でも可積分系と呼ばれる系に対しては, 多くの場合ガロア群に可換性があることが知られている. これは解がある種初等的な関数でかけることと対応する.

講演では線形の微分方程式に対してのガロア理論 (Picard-Vessiot 理論) について簡単に述べ、その応用について知られていることを紹介したい.

Central 2-arrangement に関する微分作用素環のネター性について

中島規博（北大・理）

2010.3

Holm は central arrangement の座標環の微分作用素環の研究を行った．特に，S を多項式環とすると，S のイデアル I に対して，I を保存する微分作用素の集合 $\Delta(I)$ が階数により直和分解されることを証明した．また，Holm は多項式環が 2 変数の場合の $\Delta(I)$ の多項式環上の左加群としての基底を与えた．

今，S が 2 変数多項式環のときを考える．$Q = p_1 \quad p_r$ を $\mathbb{C}^2$ の central arrangement の定義イデアルとして $I = Q\mathbb{C}[x_1, x_2]$ とおく．Holm により与えられた $\Delta^{(m)}(I)$ の左 $\mathbb{C}[x_1, x_2]$-加群としての基底による表示と $\Delta(I)$ の階数での直和分解により，微分作用素環 $D(\mathbb{C}[x_1, x_2]/I) = \Delta(I)/ID(S)$ の元の具体的な計算が可能になる．任意の $i = 1, \ldots, r$ に対して両側イデアル L_i を $L_i = \Delta(I) \cap (p_1 \quad p_i)D(S)$ と定義する．今回，$\Delta(I)$ の両側イデアルの列

$$ID(S) = L_r \quad L_{r\ \ 1} \qquad\qquad L_1 \quad L_0 = \Delta(I)$$

の各剰余 $L_{i\ \ 1}/L_i$ の具体的な計算にグレブナー基底の手法を用いることで，central 2-arrangement に関する微分作用素環が右ネターかつ左ネターな環であることを証明した．

一方で，central arrangement に関する微分作用素環を order ltration によって次数化した環はネター環であるとは限らない．

本講演では, central 2-arrangement に関する微分作用素環のネター性と order ltration によって次数化した環がネター環でない具体例について講演する．

Buchsbaum 環内の擬ソークルイデアルの挙動について

堀内淳（明治大学大学院理工学研究科）

本研究の内容は明治大学の後藤四郎教授と櫻井秀人氏との共同研究基づくものである。以下，A は極大イデアルを $\mathfrak{m}$ を持つ Noether 局所環とする。$d = \dim A > 0$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限と仮定する。$Q = (a_1, \cdots, a_d)$ を A の巴系イデアルとする。このとき，Q に関する擬ソークルイデアルは，次のように定義される。

定義. $q \geq 1$ を整数とするとき，$I = Q :_A \mathfrak{m}^q$ という形のイデアルを，Q に関する擬ソークルイデアルと呼ぶ。

ここで, 我々の研究の主結果を述べたい。

定理. A は *Buchsbaum* 局所環とし, $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ と仮定する。$q \geq 2$ は整数とする。$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は A の巴系イデアルとし, $Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}$ と仮定する。更に, $a_d = ab$, $(a \in \mathfrak{m}^q,\ \ b \in \mathfrak{m})$ と仮定しよう。このとき，$I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおくと, 次が正しい。

(1) $\quad \mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q, \qquad I \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}, \qquad I^2 = QI.$

(2) I の第 1 *Hilbert* 係数は次のように記述される。
$\mathrm{e}_I^1(A) = \mathrm{e}_I^0(A) + \mathrm{e}_Q^1(A) - \ell_A(A/I).$

(3) I の *Hilbert* 函数は，全ての非負整数 n について，次の等式で与えられる。
$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \sum_{i=2}^{d}(-1)^i \left[\mathrm{e}_Q^{i-1}(A) + \mathrm{e}_Q^i(A)\right]\binom{n+d-i}{d-i}.$

(4) I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ は *Buchsbaum* 環である。$i < d$ なら，A-加群の同型

$$\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I)) = [\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_{1-i} \cong \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A)$$

を得る。また，次が正しい。

$$\max\left\{n \in \mathbb{Z} \ \mid\ [\mathrm{H}_M^d(\mathrm{G}(I))]_n \neq (0)\right\} \leq 1 - d.$$

ここで，$M = \mathfrak{m}\mathrm{G}(I) + \mathrm{G}(I)_+$ は $\mathrm{G}(I)$ の次数付き極大イデアル，$[\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_n$ $(i, n \in \mathbb{Z})$ は，$\mathrm{G}(I)$ の M に関する第 i-次局所コホモロジー $\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))$ の n 次斉次成分を表す。

この定理における，我々の研究の主たる寄与は，主張（1）にある。主張（1）がひとたび示されると，$I^2 = QI$ であって I はイデアル $Q : \mathfrak{m}$ を含むので, 主張 (2) と (3) は後藤–大関 [GO, Section 2] から直ちに従う。同様に，主張 (4) は後藤–西田 [GN, Section 5] から従う。

参考文献

[GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra, Vol **181** (2003), 61–74.

[GO] S. Goto and K. Ozeki, *The structure of Sally modules – towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases –*, Preprint (2009).

巴系イデアルの第 1 ヒルベルト係数の挙動と環構造について

大関　一秀

本報告の内容は，L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, T. T. Phuong, W. V. Vasconcelos との共同研究 [GhGHOPV, GO] に基づくものである．

以下，A を可換な Noether 局所環とし，その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．環 A の次元 $d = \dim A > 0$ と仮定する．A-加群 M に対して，その長さを $\ell_A(M)$ と表す．このとき，環 A 内の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して，整数 $\{\mathrm{e}_I^i(A)\}_{0\le i\le d}$ たちが存在し，任意の十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して，等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} \quad \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d \quad 1}{d \quad 1} + \quad + (\quad 1)^d \mathrm{e}_I^d(A)$$

が成り立つことがよく知られている．それぞれの係数 $\mathrm{e}_I^i(A)$ をイデアル I の第 i ヒルベルト係数と呼ぶ．このヒルベルト係数の挙動にはイデアルのみならず，基礎環の構造もかなり反映されていると考えられる．

本報告では，環 A 内の巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^1(A)$ の挙動に注目する．その上で，次の Vasconcelos の予想への解答を与えることを最初の目的とする．

予想 1 ([GhHV])**.** 環 A を unmixed とする．このとき，ある A 内の巴系イデアル Q に対して $\mathrm{e}_Q^1(A) = 0$ が成り立つならば，A は Cohen-Macaulay 環である．

さらに，巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数の値の取り方が高々有限であるような局所環の特徴付けについても行う．特に，$\mathrm{e}_Q^1(A)$ の値の定常性と基礎環の Buchsbaum 性に関する，次の様な特徴付けについて述べたい．

定理 2. 環 A を *unmixed* で $d \geq 2$ とする．このとき，次の条件は互いに同値である．

(1) A は *Buchsbaum* 局所環である．
(2) 巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^1(A)$ は一定値をとり，Q の取り方に依らない．

References

[GhGHOPV] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, *Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameters*, J. London Math. Soc., to appear.

[GhHV] L. Ghezzi, J.-Y. Hong, W. V. Vasconcelos, *The signature of the Chern coefficients of local rings*, Math. Ress. Lett. **16** (2009), no. 2, 279–289.

[GO] S. Goto and K. Ozeki, *Buchsbaumness in local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters*, Nagoya Math. J., to appear.

Meiji Institute for Advanced Study of Mathematical Sciences, Meiji University, 1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki 214-8571, Japan

E-mail address: kozeki@math.meiji.ac.jp

Rees 代数の不変式環の強 F 正則性

大溪 正浩 (名古屋大学多元数理科学研究科)

現在研究中の内容について報告する. k を代数閉体, G を k 上の簡約代数群とする. A をネーター G 代数, すなわち G が作用するネーター k 代数とする. $I \subset A$ を G イデアル, すなわち A の G 部分加群であるイデアルとする. このとき, A の I による Rees 代数

$$\mathcal{R}_A(I) = A[It] = A \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus I^3t^3 \oplus \cdots \subset A[t],$$

(ここで t は A 上の不定元) もまた G 代数となる.

問題 1. G 代数 $\mathcal{R}_A(I)$ の不変部分環 $\mathcal{R}_A(I)^G$ の性質を特徴付けよ.

Rees 代数の不変式環を対象とした研究はそれほど多くない. 本研究の先行結果としては, 居相による, 有限群が環に作用する場合の Cohen-Macaulay 性および Gorenstein 性に関する結果がある.

本講演では主に A として有限次元 G 加群 V の対称代数 $\operatorname{Sym} V$ を考える. 次は簡単だが, 本研究の基礎となる.

定理 2. *G を k 上の線形簡約群, V を有限次元 G 加群, $A = \operatorname{Sym} V$ を V の対称代数とする. $\mathfrak{m} = A_+$ を A の斉次極大イデアルとする. このとき $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ は $\operatorname{char} k = 0$ のとき高々有理特異点を持ち, また $\operatorname{char} k > 0$ のとき強 F 正則である.*

この定理を一般化する方向として (1) G の条件を弱める, (2) G イデアル $\mathfrak{m}$ を変える, が考えられる. 以下主として (1) について考える.

$\operatorname{char} k = 0$ のとき, 任意の簡約群は線形簡約であることが知られている. したがって以下 $\operatorname{char} k > 0$ とし, G を線形簡約でない簡約群とする.

強 F 正則性は環直和因子に遺伝する. A^G は $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ の環直和因子であるので, $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ の強 F 正則性は A^G の強 F 正則性を導く. 特に定理 2 を一般化するには, A^G が強 F 正則となる G の作用を考える必要がある.

橋本は G 加群の良いフィルター付けを用いて, A^G が強 F 正則となる十分条件を与えた.

定義 3. G の Borel 部分群 B を固定する. G 加群 V が良いフィルター付けを持つとは, 任意の 1 次元 B 加群 λ に対して $H^1(G, V \otimes \operatorname{ind}_B^G \lambda) = 0$, ここで ind_B^G は制限関手 $\operatorname{res}_B^G : \operatorname{Mod}(G) \to \operatorname{Mod}(B)$ の右随伴関手, が成り立つことを言う. 良いフィルター付けについては Jantzen [2] を参照されたい.

定理 4 (橋本 [3]). V を有限次元 G 加群とする. $A = \mathrm{Sym}\, V$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば A^G は強 F 正則である.

上の定理の仮定の下で, 定理 2 の拡張が得られる.

定理 5. V を有限次元 G 加群とする. $\mathfrak{m}$ を $A = \mathrm{Sym}\, V$ の斉次極大イデアルとする. A が良いフィルター付けを持つとき, $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ は強 F 正則である.

参考文献

[1] S.-i. Iai, Action of finite groups on Rees algebras and Gorensteinness in invariant subrings, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **42** (1999), 393–401.

[2] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Second edition, AMS (2003).

[3] M. Hashimoto, Good filtrations of symmetric algebras and strong F-regularity of invariant subrings, *Math. Z.*, **236** (2001), 605–623

On F-thresholds

松田 一徳 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

F-threshold は正標数の環のイデアルの組に対して定義される不変量である．この概念は M.Mustaţă, 高木，渡辺により F-pure threshold の概念を拡張させることにより生み出され，正則局所環の判定イデアルの F-jumping number と一致するなど，他の不変量と関係することが分かっている．また，Bernstein-Sato 多項式の根を求めるのに F-threshold が使える ([2]) ことなど，他分野における応用も研究されている重要な不変量である．

以下，R を標数 $p > 0$ の 体 k を含む可換 Noether 環とする．R° を R のどの極小素イデアルにも含まれないような元の集合とする．$\mathfrak{a}, J$ を $\mathfrak{a} \cap R^\circ \neq \emptyset$ かつ $\mathfrak{a} \quad \sqrt{J}$ を満たす R のイデアルとする．

Definition 1 ([1])
$R, \mathfrak{a}, J$ を上記の通りとする．

$$\lim_{e \to \infty} \frac{\max\{r \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}^r \ / \ J^{[p^e]}\}}{p^e}$$

の極限が存在するとき，その値を $\mathfrak{a}$ の J に関する F-threshold といい，$c^J(\mathfrak{a})$ と書く．特に $c^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ に関する diagonal F-threshold という．

私は特に，diagonal F-threshold $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ に着目して研究している．

本講演では，F-threshold に関する現在までの研究結果を，自分のオリジナルの結果を交えながら発表する予定である．

参考文献

[1] C.Huneke, M.Mustaţă, S.Takagi and K.-i.Watanebe, *F-thresholds, tight closure, integral closure, and multiplicity bounds*, Michigan Math.J., **57**(2008), 461-480.

[2] M.Mustaţă, S.Takagi and K.-i.Watanabe, *F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials*, European congress of mathematics, 341-364, Eur.Math.Soc., Zurich, 2005.

行列式環の F-pure threshold

名古屋大学 多元数理科学研究科 博士前期課程 2 年
千葉 隆宏

正標数の可換環には、フロベニウス写像を用いていくつかの重要な不変量が定義される。私は特にその中でも、フロベニウス写像の分裂性に関する F-pure 性とその限界である F-pure threshold と呼ばれる不変量について研究している。これらはまだ具体的に計算することが難しいことが多く、例えば行列式環等のよく知られた環に対しても満足とはいえない状況にある。本講演では、 F-pure threshold の基本的な性質からはじめ、F-pure threshold のいくつかの計算例について解説する。

F-pure threshold とは, 正標数の環とそのイデアルの組が pure となる実数の上限である.

定義. R を標数 $p > 0$ の環で F-finite であるとし, $\mathfrak{a}$ を R のイデアルで $\mathfrak{a} \cap R^{\circ} \neq \emptyset$ であるものとする. $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とするとき, 組 $(R, \mathfrak{a}^t)$ が F**-pure** であるとは, 十分大きな $q = p^e$ に対して $d \in \mathfrak{a}^{\lfloor t(q-1) \rfloor}$ が存在し,

$$R \xrightarrow{F^e} R \xrightarrow{d} R$$

が split することである.

組 $(R, \mathfrak{a})$ の F**-pure threshold** を

$$\mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a}) = \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (R, \mathfrak{a}^t) \text{ は } F\text{-pure}\}$$

と定める.

参考文献

[1] S. Takagi, K.-i. Watanabe, On F-pure thresholds. J. Algebra 282 (2004), no. 1, 278–297.

マッチングの重みつき母関数と Wishart 分布のモーメントについて

栗木 哲 (統計数理研究所)
沼田 泰英 *(東大 情報理工/JST CREST)

正規分布に従うベクトルの分散共分散行列が従う確率分布は, Wishart 分布と呼ばれ, よく研究されている. 非心実 (複素)Wishart 分布のモーメントと呼ばれる統計量に対しグラフの重みつき母関数を用いた表示を与えることができた [1]. この表示を通して, パラメータが特別な非心実 (複素)Wishart 分布のいくつかのモーメントを求めることが, 条件を満たすグラフを数え上げることに帰着される. この方法によりいくつかのモーメントの公式が組合せ論的に得られることを紹介したい. また主結果に現れる母関数は, determinant, permanent, Pfaffian, Hafnian などと関連しており, 特にそれらの α-analogue との関係についても時間が許せば紹介したい.

参考文献

[1] Kuriki, S. and Numata, Y., Graph presentations for moments of noncentral Wishrt distributions and their applications, preprint.

Derivation のコホモロジーにおける Whitehead product について

内藤貴仁（信州大学大学院工学系研究科）

一般に位相空間 Z（少し仮定は必要だが）が与えられた時に、differential graded algebra（以下 dga）$(\Lambda V_Z, d)$ で Z の有理コホモロジー環と $(\Lambda V_Z, d)$ のコホモロジーが次数付き環として同型 $H^*(Z;\mathbb{Q}) \cong H^*(\Lambda V_Z, d)$ となるものが存在する。ここで ΛV_Z は次数付き有理数体 $\mathbb{Q}$ 上ベクトル空間 V_Z で生成される自由代数で、微分 d は $\mathrm{Im} d \subset \Lambda^+ V_Z \cdot \Lambda^+ V_Z$ をみたすようにとれる。また連続写像 $g : Z_1 \to Z_2$ が与えられると、dga の射 $\overline{g} : \Lambda V_{Z_2} \longrightarrow \Lambda V_{Z_1}$ が得られる。

[BL], [LS] では $n \geq 2$ に対し次の同型を与えている：

$$\pi_n(\mathrm{map}(X, Y; f)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^{-n}(\mathrm{Der}^*(\Lambda V_Y, \Lambda V_X; \overline{f})).$$

ここで $\pi_n(\mathrm{map}(X, Y; f))$ は連続写像 $f : X \to Y$ を連結成分に含む写像空間 $\mathrm{map}(X, Y; f)$ の n 次ホモトピー群、$\mathrm{Der}^n(\Lambda V_Y, \Lambda V_X; \phi)$ は ΛV_Y から ΛV_X への次数 n の $\overline{f}$-derivation（つまり $\theta(ab) = \theta(a)\overline{f}(b) + (-1)^{n \deg a}\overline{f}(a)\theta(b)$ をみたすもの）全体である。

講演では、ホモトピー群で定義される Whitehead product と呼ばれるオペレーションが上の [BL]、 [LS] の同型射で対応するような、derivation のコホモロジー $H^*(\mathrm{Der}^*(\Lambda V_Y, \Lambda V_X; \overline{f}))$ のオペレーションについて話したいと思う。

参考文献

[BL] J.Block and A.Lazarev, André-Quillen cohomology and rational homotopy of function spaces, Adv. Math., **193** (2005), 18-39.

[BM] U.Buijs and A.Murillo, The rational homotopy Lie algebra of function spaces, Comment. Math. Helv., **83** (2008), 723-739.

[LS] G.Lupton and S.Smith, Rationalized evaluation subgroups of a map I : Sullivan models, derivations and G-sequences, Journal of Pure and Applied Algebra, **209** (2007), 159-171.

Higher Frobenius-Schur indicators and quadratic Gauss sums

筑波大学数理物質科学研究科　　清水健一

有限群 G の指標 χ に対し, その n-th Frobenius-Schur indicator は

$$\nu_n(\chi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n)$$

で定義される. 有限群の表現論においてよく知られているように, χ を G の正則表現の指標とすると,

$$\nu_n(\chi) = \#\{g \in G \mid g^n = 1\}. \tag{1}$$

有限群の理論を有限次元 Hopf 代数に対して拡張することは, Hopf 代数の理論におけるひとつの指針である. Linchenko-Montogomery [LM00] は, 有限次元半単純 Hopf 代数の指標に対して Frobenius-Schur indicator を定義した. 講演者の最近の結果によれば, H を "群論的 (group-theoretical)" な有限次元半単純 (quasi-) Hopf 代数とすれば, その正則表現の n-th Frobenius-Schur indicator $\nu_n(H)$ は, H から定まるある有限群 G とその normalized 3-cocycle $\omega \in Z^3(G, \mathbb{C}^\times)$ を用いて

$$\nu_n(H) = \sum_{g \in G} \delta_{g^n,1} \prod_{k=1}^{n-1} \omega(g, g^k, g) \tag{2}$$

で計算できる. もし ω が trivial ならば, この式の右辺は式 (1) の右辺と一致することに注意せよ.

我々は代数的な動機から式 (2) を得たのであるが, 実はこの式の右辺は Altschüler-Coste の研究 [AC93] に, レンズ空間 $L(n, 1)$ の Dijkgraaf-Witten 不変量の公式として現れている. 彼らは G が巡回群の場合にこの和を計算し, それが quadratic Gauss sum

$$S(a, m) := \sum_{i=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m} \cdot ai^2\right)$$

を用いて表されることを示している. 有限群はその巡回部分群の和集合であるから, この事実は群論的 Hopf 代数の正則表現の Frobenius-Schur indicator を調べる際に非常に有効である.

講演では, 上記のような観察の下に得られる, 群論的 Hopf 代数の正則表現の Frobenius-Schur indicator に関する最近得られたいくつかの結果を紹介したい.

参考文献

[LM00] V. Linchenko and S. Montgomery. A Frobenius-Schur theorem for Hopf algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 3(4):347–355, 2000.

[AC93] D. Altschüler and A. Coste. Invariants of three-manifolds from finite group cohomology. *J. Geom. Phys.*, 11(1-4):191–203, 1993.

有限群の群代数上の Scott 加群

高橋萌子 (千葉大学理学研究科 M2)

有限群のモジュラー表現とは，素数標数をもつ体上での有限群の表現であり，約 70 年前に Brauer によって研究が始められ，基礎が築かれた．p を素数，k を標数 p の代数閉体，G を有限群とするとき，k 上の G の表現を考えることは kG-加群を考えることと同値なので，モジュラー表現論では指標だけではなく加群の研究が重要である．

有限群 G のブロックとは、体 k 上の群代数 kG を $k[G \times G]$-加群とみなしたときの直既約直和因子のことであるが，ブロックの研究は中心的な課題となっている。全ての有限生成 kG-加群は，直既約加群の直和に分解され，直既約加群の全体は各々のブロックに分割されることから，各ブロックに属する直既約加群を調べることで kG-加群の構造を知ることができる．また，各直既約 kG-加群に対して，vertex と呼ばれる G の p-部分群が G-共役を除いて一意的に存在する．

Scott 加群とは，自明な source をもつ加群であって，自明な加群を部分加群にもつものである．(H を G の部分群とするとき，H の自明な加群を G へ誘導した加群の直既約直和因子を，自明な source をもつ加群とよぶ.) 自明な source をもつ加群はその構造が指標の計算から分かるので，取扱い易い加群である．その中でも，Scott 加群は必ず存在し，かつ同型を除いて一意的である．Scott 加群について極端な場合を述べておくと，自明な群を vertex にもつ Scott 加群は直既約射影加群であり，G の Sylow p-群を vertex にもつ Scott 加群は自明な kG-加群である．

今回，G が位数 p^n $(n > 1)$ の巡回 Sylow p-群をもつ場合について，Sylow p-群より真に小さい，自明でない群を vertex にもつ Scott 加群の構造を決定した．これまでは，Scott 加群を求めるために指標を用いて Green 対応を計算しなければならなかったが，Brauer tree の形と通常指標の非自明な p-元上での値によって，Scott 加群と対応する通常指標が得られることになる．今回の研究は，越谷・功刀 [1] を動機としている．

本講演では，主定理とその証明の概要，またいくつかの例について述べる．

参考文献

[1] Koshitani,S., Kunugi,N.: Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, To appear in Math.Z.

On the Glauberman-Watanabe corresponding blocks as bimodules

田阪文規（千葉大学普遍教育センター）

有限群 G に、$q \not| |G|$ なる素数位数 q の群 S が作用しているとする。$\mathcal{O}$ を完備離散付値環で、剰余体 k が標数 p の代数閉体となり、商体 $\mathcal{K}$ が考える群に対し十分大きくなるもの、とする。$\mathcal{R} \in \{\mathcal{O}, k\}$ とする。

Glauberman は、$\mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(G)^S$（$S$-不変な G の $\mathcal{K}$-既約指標全体の集合）と $\mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(G^S)$（$S$-不変な元達からなる G の部分群 G^S の $\mathcal{K}$-既約指標全体の集合）の間に、ある良い性質を持つ一対一対応が存在することを示した（[G]）（$\mathcal{K}$-既約指標の Glauberman 対応）。

Watanabe は、「不足群」$D(\subset G^S)$ を持つ S-不変な G の p-ブロック多元環 B (群環 $\mathcal{R}G$ の直既約両側イデアル）に対し、次のような性質を持つ G^S の p-ブロック多元環 $w(B)$ が定まることを示した：
$w(B)$ は「不足群」D を持ち、B に属する $\mathcal{K}$-既約指標の集合と $w(B)$ に属する $\mathcal{K}$-既約指標の集合は Glauberman 対応により一対一対応する（[W]）（p-ブロックの Glauberman-Watanabe 対応）。

本講演では、$(\mathcal{R}G, \mathcal{R}G)$-直既約両側加群とみた p-ブロック多元環 B と $(\mathcal{R}G^S, \mathcal{R}G^S)$-直既約両側加群とみた p-ブロック多元環 $w(B)$ の間に存在するある関係 ([T]) について述べる。

参考文献

[G] G. Glauberman: *Correspondence of characters for relatively prime operator groups*, Canad. J. Math. **20** (1968), 1465–1488

[T] F. Tasaka: *A note on the Glauberman-Watanabe corresponding blocks as bimodules* (preprint)

[W] A. Watanabe: *The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups*, J. Algebra **216** (1999), 548–565

On a relation between canonical basis and Enyang's basis of B-M-W algebra

沖中 智史 (名大多元数理)

Birman-Murakami-Wenzl（B-M-W）代数は, Kauffman 多項式という結び目の不変量の研究を通じて, J.Birman-H.Wenzl 及び J.Murakami により独立に導入された代数です.

定義 1. $R = \mathbb{Z}[q^{\pm1}, r^{\pm1}, (q-q^{-1})^{-1}]$ とする. このとき, *B-M-W* 代数 $\mathcal{B}_n$ は $T_i (1 \le i < n)$ により生成され, 次の関係式を満たす結合的 R-代数である.

$$
\begin{aligned}
&(q-q^{-1})(1-E_i) = T_i - T_i^{-1} \\
&(T_i - q)(T_i - r^{-1})(T_i + q^{-1}) = 0 \\
&T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \\
&T_i T_j = T_j T_i, \quad if\ |i-j| \ge 2 \\
&E_{i+1} T_i^{\pm1} E_{i+1} = r^{\pm1} E_{i+1} \\
&E_{i-1} T_i^{\pm1} E_{i-1} = r^{\pm1} E_{i-1} \\
&E_i T_i = T_i E_i = r^{-1} E_i
\end{aligned}
$$

この代数は, 対称群の群環の量子化として知られる岩堀-Hecke 代数と密接な関連を持っており, 特に直交群や斜交群のテンソル積表現における centralizer として登場する Brauer 代数の量子化であるという側面も持っています.

それ故, この代数に対して, 岩堀-Hecke 代数に対する組合せ論的表現論のアプローチの延長線上で幾つかの先行研究が行われていて, その中の 2 つに, J.Enyang によって構成された基底と S.Fishel-I.Grojnowski によって構成された基底があり, これらはそれぞれ岩堀-Hecke 代数における Murphy 基底, Kazhdan-Lusztig 基底の拡張版になっています.

そして, 双方の基底とも岩堀-Hecke 代数の場合と同様に, B-M-W 代数に対しても cellular 代数構造を定めるのですが, 後者に対しては基底の存在のみが主張されていて, その基底の具体的表示がどの様に組み立てられるかについてはアルゴリズムが与えられていません.

この講演では, 手計算により得られた $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$ に対する Fishel-Grojnowski 基底を用いて, これと Enyang 基底との比較を行い, 双方の基底のパラメータ同士を Brauer 図形に対する Robinson-Schensted 対応で対応づけて上手く並べてやることにより, 基底の変換が三角行列として表されることをお話します. そして, 少しでもこの代数に興味を持ってもらえたらと思います.

有限半順序集合から来る SMOOTH FANO 凸多面体

大阪大学大学院情報科学研究科 M1 東谷 章弘

[本研究は、日比孝之教授との共同研究によるものである。]

Abstract. 有限半順序集合から来る terminal Gorenstein Fano 凸多面体 を導入する。このとき、どのような有限半順序集合が smooth Fano 凸多面体 を構成するかを研究する。

整 (格子) 凸多面体とは、すべての頂点が整数座標を持つ凸多面体のことである。$\mathcal{P} \quad \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。

$\mathcal{P}$ が Fano 凸多面体 とは、$\mathbb{R}^d$ の原点が $\mathcal{P}$ の内部に属する唯一の整数点になっているものである。

terminal Fano 凸多面体 $\mathcal{P}$ とは、境界に属するそれぞれの整数点が $\mathcal{P}$ の頂点になっているものである。

Fano 凸多面体 $\mathcal{P}$ が Gorenstein Fano 凸多面体であるとは、その双対凸多面体

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y\rangle \leq 1, \forall y \in \mathcal{P}\}$$

も整となるものである。($\langle x, y\rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積。)

$\mathbb{Q}$-factorial Fano 凸多面体とは、単体的 Fano 凸多面体、つまり、それぞれの facet が全て単体となっているものである。

smooth Fano 凸多面体 とは、それぞれの facet の頂点全体が $\mathbb{Z}^d$ の基底となっているものである。

特に、smooth Fano 凸多面体は、$\mathbb{Q}$-factorial, Gorenstein そして terminal である。

本講演では、与えられた有限半順序集合 P に対し、terminal Gorenstein Fano 凸多面体 $\mathcal{X}_P$ を構成する方法を紹介する。このとき、どのような有限半順序集合が $\mathbb{Q}$-factorial Fano 凸多面体 を構成するかを考える。最終的に、$\mathcal{X}_P$ が smooth であることと $\mathcal{X}_P$ が $\mathbb{Q}$-factorial であることが必要十分であることが判明する。

Akihiro Higashitani, Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail address: sm5037ha@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

ON SELFINJECTIVE ALGEBRAS OF STABLE DIMENSION ZERO

MICHIO YOSHIWAKI

ABSTRACT

R. Rouquier has introduced a notion of a dimension of a triangulated category in [3]. One of his aims is to give a lower bound for Auslander's representation dimension: namely, he has showed that for a non-semisimple selfinjective algebra A over a field k, the representation dimension of A is greater than or equal to the dimension of the stable module category $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ +2 (see [2]). Note that the representation dimension of A is equal to 2 if and only if A is representation-finite (due to Auslander [1]). So, if a selfinjective k-algebra A is representation-finite, then the dimension of the stable module category $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ is equal to 0. It has been believed that the converse is also true, but this is non-trivial. We, therefore, give an argument to answer affirmatively to this in the case that k is an algebraically closed field. As consequence, if the representation dimension of a selfinjective k-algebra A is equal to 3, then the dimension of the stable module category $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ is equal to 1.

References

[1] M. Auslander : *Representation dimension of Artin algebras*, Queen Mary College Mathematics Notes, London, 1971.

[2] R. Rouquier : *Representation dimension of exterior algebras*, Invent. Math. **165** (2006), 357-367.

[3] R. Rouquier : *Dimensions of triangulated categories*, Journal of K-theory **1** (2008), 193-256 and errata, 257-258.

Current address: Department of Mathematics and Physics, Graduate School of Science, Osaka City University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, Japan

E-mail address: `yosiwaki@sci.osaka-cu.ac.jp`

On the symmetry of selfinjective dimension

Hirotaka Koga

Abstract

Let A be a Noether ring, i.e., A is a left and right Noether ring. Does it hold true that inj dim ${}_AA < \infty$ implies inj dim $A_A < \infty$? In [Za, Lemma A] Zaks showed that if inj dim ${}_AA < \infty$ and inj dim $A_A < \infty$ then inj dim ${}_AA =$ inj dim A_A. This problem is still open. We consider the case where R is a commutative Noether ring and A is a Noether R-algebra. Assume R and A satisfy the following conditions: (1) $R_{\mathfrak{p}}$ is a Gorenstein ring for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(A)$; (2) $\mathrm{Ext}^i_R(A, R) = 0$ for $i \neq 0$. Set $\Omega = \mathrm{Hom}_R(A, R)$. Then we show proj dim ${}_A\Omega \leq 1$ if and only if proj dim $\Omega_A \leq 1$. Assume further that R is a Gorenstein local ring. Then we provide a formula of selfinjective dimension and show the symmetry of selfinjective dimension. Assume further that $\sup \{\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(A)\} < \infty$. We see from [Ab, Theorem 3.6] that the following are equivalent: (1) inj dim ${}_AA =$ inj dim $A_A < \infty$; (2) proj dim $\Omega_A =$ proj dim ${}_A\Omega < \infty$; (3) Ω is a tilting module. Take a projective resolution $P^\bullet \to \Omega$ in mod-A. If $P^\bullet$ is a partial tilting complex, i.e., $P^\bullet$ is a direct summand of a tilting complex, then we can conlude that inj dim ${}_AA < \infty$ if and only if inj dim $A_A < \infty$. So we ask when $P^\bullet$ is a partial tilting complex. More generally, let $P^\bullet \in \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{P}_A)$ with $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathrm{Mod}\text{-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[i]) = 0$ for $i > 0$. We provide a sufficient condition for $P^\bullet$ to be a direct summand of a silting complex. Also, we provide a sufficient condition for $P^\bullet$ to be a direct summand of a tilting complex provided that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathrm{Mod}\text{-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[i]) = 0$ for $i \neq 0$.

References

[Ab] H. Abe, Noetherian algebras of finite selfinjective dimension, Comm. Algebra 36, (2008), 493–507.

[Za] A. Zaks, Injective dimension of semi-primary rings, J. Algebra 13 (1969), 73-86.

Reflection for Brauer trees

Hiroki ABE

In [1], reflection functors which introduced in [2] led to APR-tilting modules. In [3], APR-tilting modules were generalized to the following. Let Λ be a finite dimensional algebra over a field K and $P_1, \cdots, P_n$ a complete set of nonisomorphic indecomposable projective modules in mod-Λ, the category of finitely generated right Λ-modules. We set $I = \{1, \cdots n\}$. Assume that there exists a simple module $S \in$ mod-Λ satisfying $\mathrm{Hom}_\Lambda(D\Lambda, S) = 0$ and $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S, S) = 0$, where $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$. Let P_t be the projective cover of S. For $t \in I$, we set $T = \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{t\}} P_i\right) \oplus \tau^{-1}S$, where τ denotes the Auslander-Reiten translation. Then T is a tilting module of Λ which is called a BB-tilting module. Furthermore, in terms of derived equivalences, we know the following. We take a minimal injective presentation $0 \to S \to E^0 \xrightarrow{f} E^1$ and define a complex $E^\bullet$ as the mapping cone of the homomorphism $f : E^0 \to E^1$. Then the complex $\mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(D\Lambda, E^\bullet)$ is a minimal projective resolution of $\tau^{-1}S$ and hence $T^\bullet = \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{t\}} P_i\right) \oplus \mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(D\Lambda, E^\bullet)$ is a tilting complex of Λ. Now, we assume that Λ is selfinjective. Then we know that $T^\bullet$ is trivial. In this talk, we will show that if $\mathrm{Hom}_\Lambda(D\Lambda, S) \cong S$ and $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S, S) = 0$, then $T^\bullet = \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{t\}} P_i\right) \oplus \mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(D\Lambda, E^\bullet) \cong \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{t\}} P_i\right) \oplus E^\bullet$ is a tilting complex of Λ. We call the derived equivalence induced by $T^\bullet$ the reflection for Λ. Our main aim is to decide the transformations of Brauer trees given by the reflection.

References

[1] M. Auslander, M. I. Platzeck and I. Reiten, Coxeter functors without diagrams, Trans. Amer. Math. Soc., **250** (1979), 1–46.

[2] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Uspechi Mat. Nauk., **28** (1973), 19–38 = Russian Math. Surveys **28** (1973), 17–32.

[3] S. Brenner and M. C. R. Butler, Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors, in: *Representation theory II*, 103–169, Lecture Notes in Math., **832**, Springer, 1980.