

On Hilbert-Kunz multiplicities

松田 一徳 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

Hilbert-Kunz 重複度は正標数の環のイデアルに対して定義される不変量である .

Definition 1 $(R, \mathfrak{m})$ を $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとする標数 $p > 0$ の Noether 局所環とし , $\dim R = d$ とする . さらに I を R の $\mathfrak{m}$ -準素イデアルとする .

このとき , 極限值

$$e_{\text{HK}}(I) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{l_R(R/\mathfrak{m}^{[p^e]})}{p^{ed}}$$

を I の Hilbert-Kunz 重複度という . ここで , $\mathfrak{m}^{[p^e]} = (a^{p^e} \mid a \in I)$ である . また , $e_{\text{HK}}(R) = e_{\text{HK}}(\mathfrak{m})$ と定める .

Hilbert-Kunz 重複度の由来は Kunz ([1]) によって正則局所環が特徴付けられたことによる . その後 Monsky([2]) によって上の形で定義され, 現在に至る . Hilbert-Kunz 重複度は 1 以上の値をとるが , 値が有理数であるかどうかはまだ分かっていない . 吉田-渡辺 ([3]) により示された , unmixed な正則局所環が $e_{\text{HK}}(R) = 1$ で特徴付けられるという定理は , Hilbert-Kunz 重複度の有用さを示す好例である . 一般に Hilbert-Kunz 重複度は計算するのが困難であるが , 代数幾何の道具などを用いて計算できることもあり , 他分野との応用がこれからも発展していくと思われる .

本講演では , Hilbert-Kunz 重複度に関する現在までの研究結果を話す予定である .

参考文献

- [1] E.Kunz, *Characterizations of regular local rings of characteristic p* , Amer. J. Math. **41**(1969), 772-784.
- [2] P.Monsky, *The Hilbert-Kunz function*, Math. Ann. **263**(1983), 43-49.
- [3] K.-I. Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. of Algebra **230**(2000), 295-317.