線形代数学の手引き

後藤四郎　監修

関谷秀夫・田口昭彦・中里和彦・中曽根康平・中村仁　編著

2005年度版

はじめに

このテキストは，大学初年級の学生が線形代数の基礎的内容 (basic course) を学ぶための手引き書として，後藤四郎先生の講義内容を原井川聡先輩が tex 化し，後藤研究室の学部メンバーが編集し直したものである．

線形代数は代数学に限らず多方面の数学の基礎であり，今や理工系だけではなく人文系・社会学系の諸分野の学生にとっても大切な基礎科目となっている．線形代数学レベルの数学にさえ十分な理解を持たないようでは，数学科の卒業生とは到底言えない．しかしながら，線形代数は広範囲の応用内容を含むにもかかわらず，これを学びあるいは教える授業時間はかなり限られていて，その取り扱いには工夫と大胆な取捨選択が必要となる．この手引き書を再編する仕事を命じられたとき，私達は「手っ取り早く線形代数の基礎を修得できる」ようにすることと共に,「単純でわかりやすい手引き書を作る」ことに力点を置いた．テキストの原本を読んで整理し，各定理になるべく詳細な証明をつけ，self-contained な完結した理論になるよう努力したつもりである．このテキストは素質的に優れた能力の高い学生には不向きかも知れないが, これから理工学部で**苦労して線形代数を学ぶであろう多くの後輩達**にとって少しでも学習上の役に立てば幸いに思う．

2005 年 3 月
田口昭彦・中曽根康平・中村仁・中里和彦・関谷秀夫

監修者から

このテキストは線型代数の基本を理解させるためのかなり強引なガイドブックです．説明を加え演習を補いながら，各節を 2 授業時間位で終わらせるよう，塩梅してあります．

一言で言えば，線型代数とは連立方程式を解く技法のことです．ですから線型代数では，正則行列の構造論と行列の基本変形が最も重要な役割を果たします．このテキストはこの視点を貫き通していますが，それはこのような基本を十分に理解してはじめて，その向こう側にある代数学的・幾何学的・解析学的世界に入ることができるようになると考えるからです．今回はこのテキストには演習問題を取り込む余裕がありませんでした．言うまでもないことですが，このテキストに述べられた内容に肉付けをし自由に動かせるようになるには，**授業に出て，演習問題を解いて計算法に習熟し，より深い数学を身に着ける必要があります．**

目 次

このテキストでは，行列は複素数の全体よりなる集合 $\mathbb{C}$ 内に成分を持つものだけを考えるが，ここで展開される理論のすべてが任意の体上で成り立ち，また大半の結果は可換環上の行列論へと拡張できるものである．

1　行列

1.1　行列

数を長方形の形に並べたものを行列という．行数が m で列数が n の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を考えるとき，この行列は (m,n) 型であるという．与えられた行列 A の i 行 j 列に配置された数 a_{ij} を行列 A の (i,j) 成分と呼び，行列 A を $A = (a_{ij})$ と表す．たとえば，次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

は $(3,3)$ 型であり, $(2,1)$ 成分は 0 であって，$(1,3)$ 成分は 3 である．

2 つの行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ について, 型が同じ (m,n) 型であってかつ全ての $1 \leq i \leq m$ と $1 \leq j \leq n$ について等式 $a_{ij} = b_{ij}$ が成立つとき, これら二つの行列は同じものであると考え, これを $A = B$ と書く．例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき型を見て $A \neq B$, $B \neq C$ であることがわかり, 行列 A, C については型は同じであるが, $a_{21} = 0$, $c_{21} = -1$ であるから，$A \neq C$ となる．

全ての成分が 0 である行列を零行列と呼び, これを 0 と書く．$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であって, 型が違っていても，同じ記号 0 を用いる．

数を正方形に並べて得られる行列を，正方行列という．(n,n) 型の行列を n 次正方行列と呼ぶ．

$$(1), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

は，それぞれ 1 次, 2 次, 3 次, 4 次正方行列である．

定義 1.1. $a_{ii}=1$ とし，$i\neq j$ ならば $a_{ij}=0$ と置くことによって定まる n 次正方行列 (a_{ij}) を**単位行列**と呼び, E と書く．即ち

$$E=\begin{pmatrix} 1 & & & \text{\Large O} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large O} & & & 1 \end{pmatrix}$$

である．とくに, n 次単位行列というように，型 (n,n) を指定したいときは，$E=E_n$ と書く．

$(n,1)$ 型の行列を n 次列ベクトル, $(1,n)$ 型の行列を n 次行ベクトルと呼ぶことが多い．即ち

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

は，それぞれ 3 次列ベクトル, 4 次行ベクトルである．

1.2 行列の演算

行列の間には,「和」・「差」・「スカラー倍」, そして「積」という 4 種類の「演算」がある．

(1) 和 (m,n) 型の 2 つの行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ について，$[A+B]_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ によって，A と B の和 $A+B$ を定める.（但しここで，$[A+B]_{ij}$ は，新しく定められる行列 $A+B$ の (i,j) 成分を表している．以下このような書き方をすることも多い.）行列 $A+B$ は A,B と同じ (m,n) 型であり, その (i,j) 成分は，上の等式 $[A+B]_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ で与えられる．たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

である．**型の異なる行列同士の和は考えない．**

(2) 差 (m,n) 型の 2 つの行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ に対し，A と B の差 $A-B$ は，同じ (m,n) 型の行列であって, その (i,j) 成分は $[A-B]_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ によって与えられる．すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

である．

(3) スカラー倍 λ をスカラー (単に,「数」のことである), A を (m, n) 型の行列とする．このとき，λA は (m, n) 型の行列であって，その (i, j) 成分は $[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ で与えられる．例えば

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

である．特に $\lambda = -1$ のとき, 即ち $(-1)A$ を $-A$ と書く．従って, 2 つの (m, n) 型の行列 $A,\ B$ に対し，$A - B = A + (-B) = A + (-1)B$ という等式が得られる．

(4) 積 $A = (a_{ij})$ を (m, n) 型の行列, $B = (b_{ij})$ を (n, ℓ) 型の行列とする．このとき，A と B の積 AB は，次の様に定義される．

AB は (m, ℓ) 型の行列であって，$1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq \ell$ に対し，その (i, j) 成分 $[AB]_{ij}$ は

$$[AB]_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

で与えられる．(m, n) **型と** (n, ℓ) **型の行列の積は，**(m, ℓ) **型の行列である．**たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．$n \neq n'$ **のときは，**(m, n) **型の行列と** (n', ℓ) **型の行列の積は考えない．**

以上で定めた**和・差・積．スカラー倍**については，以下の主張が正しい．

定理 1.2. 次が正しい．

(1) $A + B = B + A$.

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(3) $A + 0 = 0 + A = A$.

(4) $A + (-A) = 0 = (-A) + A$.

但し, $A,\ B,\ C$ は (m, n) 型の行列で，0 は (m, n) 型の零行列を表す．

Proof. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{pmatrix}$
とする．

(1)

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$B+A=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}.$$

よって $A+B=B+A$ である.

(2)

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn} \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}+b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1}+c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn}+b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A+(B+C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}+b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1}+c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn}+b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって $(A+B)+C=A+(B+C)$ である.

(3) $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{aligned} A + 0 &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}+0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}+0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn}+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

故に (1) より $A + 0 = 0 + A = A$ となる.

(4)

$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{mn} \end{pmatrix}$ である. 故に

$$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}-a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}-a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn}-a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(1) より $A + (-A) = (-A) + A = 0$ となる. □

定理 1.3 (結合法則と分配法則). 次が正しい.

(1) $(AB)C = A(BC)$.

(2) $A(B + C) = AB + AC$.

(3) $(A+B)C = AC + BC$.

但し, (1) においては，A は (m,n) 型, B は (n,ℓ) 型, C は (ℓ,k) 型の行列を表し, (2) では，A は (m,n) 型, B, C は (n,ℓ) 型の行列とする．(3) では，A, B は (m,n) 型の行列, C は (n,ℓ) 型の行列とする.（即ち，各等式においては，それぞれ和や積が定義されているような行列しか考えていないのである.）

Proof. 略記した記述法を採用する.

(1) $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ として, それぞれ (m,n) 型, (n,ℓ) 型, (ℓ,k) 型の行列とする．まず $(AB)C$ と $A(BC)$ の行列の型が一致することを確かめる．左辺は AB は (m,ℓ) 型, C は (ℓ,k) 型であるから，$(AB)C$ は (m,k) 型の行列である．一方で右辺は，A は (m,n) 型, BC は (n,k) 型であるから，$A(BC)$ は (m,k) 型の行列であり，$(AB)C$ と $A(BC)$ は同じ型の行列であることがわかる．次に，AB の (s,β) 成分は $[AB]_{s\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{s\alpha}b_{\alpha\beta}$ であるから，$(AB)C$ の (s,t) 成分は

$$[(AB)C]_{st} = \sum_{\beta=1}^{\ell}[AB]_{s\beta}c_{\beta t} = \sum_{\beta=1}^{\ell}(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{s\alpha}b_{\alpha\beta})c_{\beta t} = \sum_{\beta=1}^{\ell}(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{s\alpha}b_{\alpha\beta}c_{\beta t}) \quad \cdots$$

である．同様に，BC の (α,t) 成分は $[BC]_{\alpha t} = \sum_{\beta=1}^{\ell} b_{\alpha\beta}c_{\beta t}$ であるから，$A(BC)$ の (s,t) 成分は

$$[A(BC)]_{st} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{s\alpha}(\sum_{\beta=1}^{\ell} b_{\alpha\beta}c_{\beta t}) = \sum_{\alpha=1}^{n}(\sum_{\beta=1}^{\ell} a_{s\alpha}b_{\alpha\beta}c_{\beta t}) \quad \cdots$$

となる．　と　は，ともに $a_{s\alpha}b_{\alpha\beta}c_{\beta t}$ を α と β を独立に動かして加えた値であるから，その順番によらず和の値は等しい．故に

$$[(AB)C)]_{st} = [A(BC)]_{st} \quad (1 \le s \le m,\ 1 \le t \le k)$$

となり，$(AB)C = A(BC)$ であることがわかる.

(2) $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ とし, A は (m,n) 型, B, C は (n,ℓ) 型の行列とする．(1) と同様に，行列 $A(B+C)$ と $AB+AC$ の型を考えると, ともに (m,ℓ) 型であることがわかる．$A(B+C)$ の (i,j) 成分は

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}\cdot[B+C]_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}(b_{\alpha j}+c_{\alpha j}) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}b_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}c_{\alpha j},$$

$AB+AC$ の (i,j) 成分は

$$[AB+AC]_{ij} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}b_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}c_{\alpha j}$$

である．従って $A(B+C)=AB+AC$ である．

(3) $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),\ C=(c_{ij})$ とし，$A,\ B$ は (m,n) 型，C は (n,ℓ) 型の行列とする．(1) と同様に，行列 $(A+B)C$ と $AC+BC$ の型を考えると，ともに (m,ℓ) 型である．行列 $(A+B)C$ の (i,j) 成分は

$$[(A+B)C]_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n}(a_{i\alpha}+b_{i\alpha})c_{\alpha j}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}c_{\alpha j}+\sum_{\alpha=1}^{n}b_{i\alpha}c_{\alpha j}.$$

また，$AC+BC$ の (i,j) 成分は

$$[AC+BC]_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}c_{\alpha j}+\sum_{\alpha=1}^{n}b_{i\alpha}c_{\alpha j}$$

である．故に $(A+B)C=AC+BC$ である． □

定理 1.4. $\lambda,\ \mu$ をスカラー，$A,\ B$ を (m,n) 型の行列とすると，次の等式が成立つ．

(1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

(3) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

(4) $1A=A$.

従って，

$$\lambda(-A)=(-\lambda)A=-\lambda A,\quad \lambda(A-B)=\lambda A-\lambda B,\quad (\lambda-\mu)A=\lambda A-\mu A$$

である．

Proof. $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\quad(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ とする．$[\lambda(A+B)]_{ij}=\lambda\cdot[A+B]_{ij}=\lambda(a_{ij}+b_{ij})=\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}$ であって $[\lambda A+\lambda B]_{ij}=[\lambda A]_{ij}+[\lambda B]_{ij}=\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}$ である．故に $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ である．$[(\lambda+\mu)A]_{ij}=(\lambda+\mu)a_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}$ であって $[\lambda A+\mu A]_{ij}=[\lambda A]_{ij}+[\mu A]_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}$ である．故に $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ である．$[\lambda(\mu A)]_{ij}=\lambda\cdot[\mu A]_{ij}=\lambda(\mu a_{ij})=(\lambda\mu)a_{ij}$，$[(\lambda\mu)A]_{ij}=(\lambda\mu)a_{ij}$ である．故に $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$ である．$[1A]_{ij}=1a_{ij}=a_{ij}=[A]_{ij}$ である．故に $1A=A$ である． □

同様に，A を (m,n) 型の行列とし，B と C を (n,ℓ) 型の行列とすれば等式，$A(B-C)=AB-AC$ が成立つ．A と B を (m,n) 型の行列とし C を (n,ℓ) 型の行列とすれば，$(A-B)C=AC-BC$ である．

命題 1.5. λ をスカラーとし, A は (m,n) 型の行列で B は (n,ℓ) 型の行列とすれば, 等式

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

が成立つ．故に $(-A)B = A(-B) = -AB$ である．

Proof. $A = (a_{ij})$，$B = (b_{jk})$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq \ell)$ とする．

$$[(\lambda A)B]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij}) b_{jk} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

$$[A(\lambda B)]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\lambda b_{jk}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

$$[\lambda(AB)]_{ik} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

である．故に $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ である． □

命題 1.6. $E_m A = A E_n = A$ である．但し, E_m, E_n は単位行列，A は (m,n) 型の行列とする.

Proof. $A = (a_{ij})$ とする．各整数 i, j に対し $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ とおく（これを**クロネッカーのデルタ**と呼ぶ）．単位行列 E_m と E_n の (i,j) 成分はどちらも δ_{ij} で表される．故に，$[E_m A]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$，$[AE_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$ であって，$E_m A = A E_n = A$ となる． □

次に, $A_1, A_2, \cdots, A_s$ を n 次正方行列とする．このとき，積 $A_1 A_2 \cdots A_s$ を

$$A_1 A_2 A_3 = (A_1 A_2) A_3,$$

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = ((A_1 A_2) A_3) A_4$$

一般には

$$A_1 A_2 \cdots A_s = ((\cdots(((A_1 A_2) A_3) A_4) \cdots) A_{s-1}) A_s$$

と定める. 故に $s \geq 2$ のときは

$$A_1 A_2 \cdots A_s = (A_1 A_2 \cdots A_{s-1}) A_s$$

である.

定理 1.7. A_i, B_j $(1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq t)$ を n 次正方行列とすると，等式

$$(A_1 A_2 \cdots A_s)(B_1 B_2 \cdots B_t) = A_1 A_2 \cdots A_s B_1 B_2 \cdots B_t$$

が成立つ．これを**拡張された結合法則**という.

Proof. $t=1$ のときは，積の定義により

$$(A_1A_2\cdots A_s)B_1 = A_1A_2\cdots A_sB_1$$

である．次に $t \geq 2$ であって $t-1$ まで定理の等式が成立つと仮定する．このとき，$B_1B_2\cdots B_t = (B_1B_2\cdots B_{t-1})B_t$ であるから

$$\begin{aligned}
(A_1A_2\cdots A_s)(B_1B_2\cdots B_t) &= (A_1A_2\cdots A_s)((B_1B_2\cdots B_{t-1})B_t) \quad \text{（連続した積の定義）}\\
&= ((A_1A_2\cdots A_s)(B_1B_2\cdots B_{t-1}))B_t \quad \text{(結合法則)}\\
&= (A_1A_2\cdots A_sB_1B_2\cdots B_{t-1})B_t \quad \text{（帰納法の仮定）}\\
&= A_1A_2\cdots A_sB_1B_2\cdots B_{t-1}B_t \quad \text{（連続した積の定義）}
\end{aligned}$$

である． □

注意 1.8. 行列の積については**交換法則が成立しない．**即ち，等式 $AB = BA$ は，すべての n 次正方行列 A, B について成立するわけではない．例えば，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を見よ．

$A = (a_{ij})$ を (m, n) 型の行列とし $c_1, c_2, \cdots, c_n$ をスカラーとすれば，等式

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

が成立つ．各 $1 \leq j \leq n$ に対し $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (n 次列ベクトルで，$(j, 1)$ 成分が 1 であって，残りの成分はすべて 0 である）と置き，これらを n 次**単位ベクトル**という．(m, n) 型の行列 $A = (a_{ij})$ に n 次単位ベクトル e_j をかけると，行列 A の第 j 列が得られる: $Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

2　正則行列

2.1　正則行列の性質

この項では，特に断らない限り, 考えている行列はすべて同じ型を持った n 次正方行列とする．ここで n は正の整数であって，最後まで固定されていると考える. 以下 $E = E_n$ とおく.

定義 2.1. 行列 A は, ある行列 X が存在して等式 $AX = XA = E$ が成立つとき，正則であるという.

このとき，このような行列 X は，行列 A に対しただ一つしか存在しない（行列 X は A に対して**一意的に定まる**という）．実際，別の行列 Y があって等式 $YA = AY = E$ が成立つならば

$$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$$

となり，$X = Y$ が得られる．行列 X を A の逆行列といい，$X = A^{-1}$ (**「A inverse」と読む**) という記号で表す.

例 2.2. $n = 2$ とし，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, 行列 A が正則であることと, $ad \neq bc$ が成立つことは同値である．このとき行列 A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる.

Proof. $\Delta = ad - bc,\ B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とすると

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \Delta E$$

$$BA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \Delta E$$

であるから，等式 $AB = BA = \Delta E$ が成立つ．故に，$\Delta \neq 0$ ならば，$A \cdot \dfrac{1}{\Delta} B = \dfrac{1}{\Delta} B \cdot A = E$ となり，行列 A は正則であって，$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} B = \dfrac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であることがわかる．逆に, A が正則ならば

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$$

であって

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(\Delta E) = \Delta(A^{-1}E) = \Delta A^{-1}.$$

故に $B = \Delta A^{-1}$ である．ここでもし $\Delta = 0$ ならば，$B = 0$ となり，$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であるから，$A = 0$ となる．故に $E = AA^{-1} = 0A^{-1} = 0$ となるが，これは不可能である．故に $\Delta \neq 0$ である． □

従って, 例えば $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であるが，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ は正則でない．行列

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は必ず正則であって，$A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$ である．

$n = 2$ の場合でさえも，行列 A の正則性をその定義に従って確かめることは, 苦労が多い割に得る所が少ないと思われる．実際，上の例 2.2 に述べた同値性を定義に従って確かめようとすれば，下記のようになる．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則のときは，$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと，$AA^{-1} = E$ であるから

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という 4 つの等式が得られる．そこで $ad = bc$ であると仮定して，これらの等式を変形していくと，かなり見通しの良くない計算をして，やっと $1 = 0$ が導かれ，従って $\Delta = ad - bc \neq 0$ であることがわかる，というのが証明の概要である．この方法は $n \geq 3$ の場合にはやる気がしないし，$n = 2$ の場合でもそもそも何をしているのかが見えない．それと比べると, 行列 B を用い例 2.2 の証明中で述べた議論は，理解するのに幾らかの訓練が必要であるとはいえ，一般的かつ強力な理論の存在を示唆するものである．実際，そのような理論を学ぶことなしには，サイズの大きい行列の解析に立ち向かうことは，ほぼ不可能である．このテキストでは，これからそのような**理論造り**を実行しようとしていると考えても，さほど的外れではないし，数学を学ぶとはそのような営みを指すのであろう．

さてまず初めに次を示そう．

補題 2.3. $A,\ B,\ Q$ は n 次正方行列とする．

(1) 単位行列 E は正則であって，$E^{-1} = E$ である．

(2) A が正則なら，A^{-1} も正則であって，$(A^{-1})^{-1} = A$ である．

(3) $A,\ B$ が正則ならば，積 AB も正則であって，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ となる（**積の順序に注意すること**）．より一般に，行列 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ が全て正則ならば，積 $A_1A_2\cdots A_s$ も正則であって，等式

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

が成立つ．

(4) Q が正則であって積 QA も正則なら，行列 A は正則である．

Proof. (1) $EE=EE=E$ であるから，E は正則であって，$E^{-1}=E$ である．

(2) $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ であるから，A^{-1} から見れば，A がその逆行列である．

(3) $(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$, $(AB)(B^{-1}A^{-1})=ABB^{-1}A^{-1}=AEA^{-1}=E$ である．故に行列 AB は正則であって，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ となる．次に $s\geq 3$ とし，$s-1$ まで (3) の主張は正しいと仮定する．積 $A_1A_2\cdots A_{s-1}$ は正則であって，$(A_1A_2\cdots A_{s-1})^{-1}=A_{s-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$ である．ここで，$A_1A_2\cdots A_s=(A_1A_2\cdots A_{s-1})A_s$ であるから, $s=2$ の場合の結果により $A_1A_2\cdots A_s$ は正則であり，等式

$$\begin{aligned}(A_1A_2\cdots A_s)^{-1} &= ((A_1A_2\cdots A_{s-1})A_s)^{-1}\\ &= A_s^{-1}(A_1A_2\cdots A_{s-1})^{-1}\ \text{（}s=2\text{ の場合の結果）}\\ &= A_s^{-1}(A_{s-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1})\ \text{（帰納法の仮定）}\\ &= A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}\ \text{（拡張された結合法則）}\end{aligned}$$

が成立つ．

(4) $Q^{-1}(QA)=(Q^{-1}Q)A=EA=A$ であって，(2) と (3) より $Q^{-1}(QA)$ は正則であるから，行列 A は正則である． □

命題 2.4. 行列 A が正則ならば，A のどの列ベクトルも決して 0 ではない．同様に，行列 A が正則なら，そのどの行ベクトルも 0 ではない．

Proof. 行列 A のある列が 0 であったならば

$$A^{-1}A=A^{-1}\begin{pmatrix} & 0 & \\ * & \vdots & * \\ & 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & 0 & \\ ** & \vdots & ** \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

であるから，積 $A^{-1}A$ の対応する列も 0 となるが，これは $A^{-1}A=E$ に反する． □

命題 2.5. A を正則行列とする．

(1) (n,ℓ) 型の行列 X について，$AX=0$ ならば $X=0$ である．

(2) (n,ℓ) 型の行列 X，Y について，等式 $AX=AY$ が成立つなら，$X=Y$ である．

Proof. (1) は，$A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=EX=X$ であることによる．(2) は，$A(X-Y)=0$ であるから，(1) より $X-Y=0$，即ち $X=Y$ が従う． □

命題 2.5 を使って，行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$ が正則でないことを示そう．0 ではない 3 次列ベクトル $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ があって，等式 $AX=0$ が成立つことを示したい．$AX=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\2x+3y+4z\\x+y+z\end{pmatrix}$ であるから，連立方程式 $(*)$

$$\begin{cases}x+2y+3z=0\\2x+3y+4z=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

を解くと，$\begin{cases}x+2y+3z=0\\y+2z=0\end{cases}$ 即ち，解 $y=-2z,\ x=z$ が得られる．故に例えば $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ は上の連立方程式 $(*)$ の非自明な解 **（$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ではない解）** の一つであるから，等式

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

が成立つ．故に行列 A は正則でない．

さて，$n\geq 2$ とし，$\alpha=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_{n-1})$, $\beta=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_{n-1})$ を $(1,n-1)$ 型の行列, A と B を $n-1$ 次正方行列とする．このとき，次のようにして，n 次正方行列 $\widetilde{A}$ を定めることができる．

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{c|c}1&\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{n-1}\\\hline 0&\\ \vdots&A\\0&\end{array}\right).$$

この行列を単に $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&A\end{pmatrix}$ と書くことにしよう．同様に，n 次正方行列 $\widetilde{B}$ を次のように定

める．

$$\widetilde{B} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \beta_1\ \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

このようにして得られた行列 $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ について，次の等式

$$(*) \qquad \widetilde{A}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta + \alpha B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$$

が成立つ．これを行列の**分解による積**という．

Proof. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と表せば

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\widetilde{B} &= \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \hline 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,1} & a_{n-2\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \\ \hline 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & b_{n-1\,1} & b_{n-2\,2} & \cdots & b_{n-1\,n-1} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k b_{k1} & \cdots & \beta_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k b_{k\,n-1} \\ \hline 0 & \sum_{k=1}^{n-1} a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} a_{1k} b_{k\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1\,k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1\,k} b_{k\,n-1} \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \beta + \alpha B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である． $\square$

系 2.6. α, A, $\widetilde{A}$ は上と同様とすると，行列 $\widetilde{A}$ が正則であるための必要十分条件は，行列 A が正則であることである．このとき等式 $\widetilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ が成立つ．

Proof. A が正則なら，$\alpha + (-\alpha A^{-1})A = \alpha + (-\alpha)(A^{-1}A) = \alpha + (-\alpha) = 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^{-1}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = E_n$$

となり, 一方で

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-\alpha A^{-1}) + \alpha A^{-1} \\ 0 & AA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = E_n$$

であるから, 行列 $\widetilde{A}$ は正則であって，$\widetilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ であることがわかる．逆に，行列 $\widetilde{A}$ が正則なら，n 次正方行列 X が存在して等式

$$X \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成立つ．$X \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$ であるから，行列 X の第一列は列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ に等しい．行列 X を，$n-1$ 次の正方行列 Y と $(1, n-1)$ 型の行列 γ によって，$X = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ と分解しよう．すると

$$X\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \gamma A \\ 0 & YA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$$

でありかつ

$$\widetilde{A}X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma + \alpha A \\ 0 & AY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$$

であるので，$YA = AY = E_{n-1}$ が得られ，行列 A は正則であることが従う．

$\square$

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であり

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ -(2 \quad 3) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1)$$

である．系 2.6 により

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

となる．実際

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

また

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である．

系 2.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & & * & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ という形をした正方行列は，必ず正則である．

Proof. 行列 A は n 次正方行列とする．n についての帰納法を用いる．$n = 1$ ならば，$A = (1)$ となり，確かに A は正則である．$n \geq 2$ とし，$n - 1$ 次まで系 2.7 の主張は正しいと仮定する．すると行列 A はある $n - 1$ 次の正方行列 A' と $(1, n-1)$ 型の行列 α を用いて

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \alpha \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

という形に分解されるが，帰納法の仮定によって行列 A' は正則であるので，系 2.6 より行列 A も正則となる． □

2.2 行列の基本変形と正則行列

次の 3 つの操作を，行（または，列）に関する**行列の基本変形**という．

(1) ある行（または，列）を λ 倍 (λ **はスカラーで，**$\lambda \neq 0$) する．

(2) ある行（または，列）を λ 倍 (λ はスカラー) して**他の行**に加える．

(3) 2 つの行（または，列）を入れ替える．

ここで，(3) は (1), (2) の組み合わせで得られることに注意しよう．実際，例えば

$$\begin{array}{ll} i\text{ 行} & a \\ j\text{ 行} & b \end{array} \to \begin{array}{c} a \\ a+b \end{array} \to \begin{array}{c} a-(a+b) \\ a+b \end{array} = \begin{array}{c} -b \\ a+b \end{array} \to \begin{array}{c} -b \\ a+b+(-b) \end{array} = \begin{array}{c} -b \\ a \end{array} \to \begin{array}{c} b \\ a \end{array}$$

を見ればよい．この一連の操作は，まず第 i 行を第 j 行に加え，次に第 j 行を -1 倍して第 i 行に加え，それから第 i 行を第 j 行に加え，最後に第 i 行を -1 倍したのである．このように，行（あるいは，列）に関する基本変形では，(1), (2) が本質的である．さてここで大切なことは，こ

のような行 (列) 変形が行列 $A = (a_{ij})$ に，左（右）から，ある特別な（**基本行列**と呼ばれている）正則行列をかけることによって，実現されるということである．

A を (m, n) 型の行列とする．まず，0 でないスカラー λ を取り，m 次正方行列 P を

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} &&&i&&& \\ &&&\vee&&& \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \ > \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&\text{O}& \\ &&1&&&& \\ &&&\lambda&&& \\ &&&&1&& \\ &\text{O}&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

と置く．このとき行列 PA は

$$PA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

となる．一方で, $i \neq j$ として m 次行列 Q を

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} &&i&&j&& \\ &&\vee&&\vee&& \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \ > \\ \\ j \ > \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&&\text{O}& \\ &&&\ddots&&& \\ &&\lambda&&1&& \\ &&\text{O}&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

と置いて, 上と同様に QA を求めれば，次のようになる.

$$QA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j-1\,1} & a_{j-1\,2} & \cdots & a_{j-1\,n} \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ a_{j+1\,1} & a_{j+1\,2} & \cdots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

列に関する基本変形 (1), (2) は，行列 P, Q を右から行列 A にかけることによって実現される．なお，ここで定めた行列 $P,\ Q$ は必ず正則である．実際, P^{-1}, Q^{-1} としては，それぞれ

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \text{O} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & \text{O} & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -\lambda & & 1 & & \\ & & \text{O} & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を取ればよいからである．基本変形を引き起こす行列を**基本行列**と呼ぶ．上に述べたように，**基本行列は正則であってその逆行列も基本行列である.**

定理 2.8. *n 次正方行列 A について, 次の 2 条件は同値である.*

(1) *A は正則である.*

(2) *A は，行についての基本変形のみで，単位行列 E に変形される.*

従って, すべての正則行列は，何個かの基本行列の積に等しい.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) A は正則であるから, 命題 2.4 によって，その第 1 列は 0 でない．行の入れ替えを行って，行列 A の $(1,1)$ 成分 a_{11} が 0 でないようにする．次に，第一行を $\dfrac{1}{a_{11}}$ 倍して，$a_{11} = 1$ にする．最後に，行列 A の第一行を $-a_{i1}$ $(2 \le i \le n)$ 倍して第 i 行に加え，行列 A の第一列の成分は，$a_{11} = 1$ の他はすべて 0 であるように変形する．以上の行基本変形に対応する基本行列の積を Q とすると，$QA = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$ となる．ここで，B は $n-1$ 次の正方行列であって，α は $(1, n-1)$ 型の行列である．$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1})$ としよう．系 2.6 により行列 B は正則であるから，今度は行列 $B = (b_{ij})$ の第一列が $b_{11} = 1,\ b_{i1} = 0$ $(2 \le i \le n-1)$ となるように，行列 A に

行基本変形を行う．このとき行列 A の第一列には変化がおきないことに注意しよう．最後に行列 A の第 2 行を $-\alpha_1$ 倍して第一行に加えることによって，$\alpha_1 = 0$ とすることができる．即ち，$a_{i1} = 0\ (i \neq 1)$，$a_{i2} = 0\ (i \neq 2)$，$a_{11} = a_{22} = 1$ である：

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array}\right).$$

以上の操作を繰り返せば，行列 A を行基本変形のみで単位行列 E に変形できる．

(2) $\Rightarrow$ (1) A は，行についての基本変形のみで，単位行列 E に変形される．各基本変形に対応する基本行列を $P_1, P_2, \cdots, P_s$ とすれば，$(P_s P_{s-1} \cdots P_1)A = E$ であって，この等式の両辺に左から $P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$ をかける

$$(P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1})((P_s P_{s-1} \cdots P_1)A) = (P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1})E$$

ことによって等式 $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$ が得られる．即ち行列 A は何個かの基本行列（これらは，必ず正則である）の積であって，正則である． □

これを用いて，正方行列が正則であるかどうかを判定し，正則である場合には同時にその逆行列を求める実際的な方法が得られる．たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を見るに，$(3,6)$ 型の**拡大行列**

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad (B|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

に，行だけの基本変形を施し続けることによって，正則であるかどうかの判定を行うことができる．まず行列 A について見てみよう．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&3&5&0&0&1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&4&3&-3\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

となるから, この行列 A は正則であって，逆行列は $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ である．行列 B については結果だけを書くと

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-3&2&0\\0&1&2&2&-1&0\\0&0&0&1&-1&1\end{array}\right)$$

となる．

n 次正方行列 A に対して，上のような $(n, 2n)$ 型の拡大行列 $(A|E)$ を作り，これに対して行基本変形だけを施し，最後の第 n 行までこの操作が辿り着いて，左半分の行列が n 次単位行列 E になったということは，何個かの基本行列の積であるような n 次正則行列 Q があって，等式

$$Q(A|E) = (QA|Q) = (E|Q)$$

が成立つことを意味する．従って行列 A は行の基本変形のみで単位行列に変形されるので，定理 2.8 により行列 A は正則であり，その逆行列は $Q = A^{-1}$ で与えられる (例えば, 上の行列 A を見よ)．逆に，もし行列 A が正則ならば，定理 2.8 によって，この操作は必ず最後までたどり着

く筈である．実際，もしも辿り着けないとしたら, それはどこかで

$$(A|E) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & & & \\ & \ddots & & * & \\ & & 1 & & \\ \hline & 0 & & 0 & \end{array}\right)$$

となるからである．即ち，何かある正則行列 Q に対して等式

$$QA = \left(\begin{array}{c} * \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

が成立つので, 命題 2.4 より行列 QA は正則ではなく, 従って行列 A は決して正則ではない.

3 連立方程式

3.1 正則行列の特徴付け

次の定理から始めよう.

定理 3.1. A, B を n 次正方行列とする．$AB = E$ ならば，A と B はどちらも正則であって，等式 $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ が成立つ.

Proof. 行列 B が正則であることを n についての帰納法で証明しよう．$n = 1$ なら自明である．$n \geq 2$ とし $n-1$ 以下まで，定理の主張は正しいと仮定する.

$$AB = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

であるので，行列 B の第一列は 0 でない．故に行変形で B を

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \beta \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_0 \\ 0 & \end{array}\right)$$

という形にできる．即ち正則行列 Q を取って

$$QB = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \beta \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_0 \\ 0 & \end{array}\right)$$

とすることができるが, このとき $(AQ^{-1})(QB) = E$ であり, QB が正則なら補題 2.3 より行列 B は正則であるので, 定理の主張を証明するには，A を AQ^{-1} で置き換え，B を QB で置き換えて，一般性を失うことなく

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \beta \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_0 \\ 0 & \end{array}\right)$$

と仮定してよいことがわかる．このとき, 行列 A は

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \alpha \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_0 \\ 0 & \end{array}\right)$$

という形をしているので，等式 $A_0B_0 = E_{n-1}$ が成立つ．帰納法の仮定により行列 B_0 は正則であるから，系 2.6 により行列 B は正則である． □

この定理から非常に多くの大切な系が導かれる．

系 3.2. *A を n 次正方行列とすれば, 次の条件は同値である.*

(1) *A は正則である.*

(2) *等式 $XA = E$ を満たす n 次正方行列 X が存在する.*

(3) *等式 $AY = E$ を満たす n 次正方行列 Y が存在する.*

Proof. (1) ⇒ (2) 行列 A は正則なので，等式 $AX = XA = E$ を満たす n 次正方行列 X が存在するから，等式 $XA = E$ を満たす n 次正方行列 X が存在する．

(2) ⇒ (1) 定理 3.1 より行列 A は正則である．

(1) ⇔ (3) 同様である． □

系 3.3. *A, B を n 次正方行列とする．積 AB が正則なら，行列 A も B も正則である．*

Proof. AB が正則なので，X を AB の逆行列とすれば，等式 $(AB)X = X(AB) = E$ が成立つ．即ち $A(BX) = (XA)B = E$ であるから，系 3.2 によって A も B も正則である． □

系 3.4. A を n 次正方行列とせよ．次の 3 条件は同値である．

(1) A は正則である．

(2) $x \in \mathbb{C}^n$ とすると，$Ax = 0$ なら $x = 0$ である．

(3) 任意の $y \in \mathbb{C}^n$ に対し，等式 $y = Ax$ を満たす $x \in \mathbb{C}^n$ が存在する．

但し，$\mathbb{C}^n$ は n 次列ベクトル全体よりなる集合を表す．

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) A は正則である．等式 $Ax = 0$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，$x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$ となる．故に $x = 0$ である．

(2) $\Rightarrow$ (1) n についての帰納法で確かめよう．$n = 1$ のときは，$A = (a_{11})$ である．仮定により $a_{11} \neq 0$ であるので，行列 A は正則である．$n \geq 2$ とし，$n - 1$ までこの主張は正しいと仮定する．行列 A の第一列は Ae_1 に等しく $e_1 \neq 0$ であるから，仮定により行列 A の第一列は 0 でない．故に，行列 A に，その $(1, 1)$ 成分を 1 にし，第一列の残りの成分をすべて 0 にするよう，行基本変形を施すことができる．即ち，ある n 次正則行列 Q をとって $QA = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \alpha \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_0 \\ 0 & \end{array}\right)$ という形にすることを得る．継いで列変形を施し，行列 A の第一行は，$(1, 1)$ 成分 $a_{11} = 1$ を除く残りの成分がすべて 0 になるようにする．即ち

$$QAP = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_0' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

(但し, P は正則行列である)．ここで $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1}$ を取り，$y = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ x \\ \\ \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ と置いて，上の等式の両辺に右から y をかければ

$$(QAP)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ x \\ \\ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_0' & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ x \\ \\ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ A_0'x \\ \\ \end{array}\right)$$

が得られる．故に，もしも $A'_0x = 0$ ならば，$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline A'_0x \end{array}\right) = 0$ であるから，$(QAP)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \end{array}\right) = 0$ となる．行列 Q は正則であるから，$(AP)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \end{array}\right) = 0$．よって $A(P\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \end{array}\right)) = 0$ であるから，条件 (2) より $P\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \end{array}\right) = 0$ が得られ，行列 P は正則なので $\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \end{array}\right) = 0$ であることが従う．故に $x = 0$ である．従って，帰納法の仮定より行列 A'_0 は正則であり，故に系 2.6 より行列 QAP は正則であって，系 3.3 より行列 A も正則である．

(1) ⇒ (3) $y \in \mathbb{C}^n$ に対し，$x = A^{-1}y$ と置けば，等式 $y = Ax$ が成立つ．

(3) ⇒ (1) 各 $1 \leq j \leq n$ に対し等式 $Ax_j = e_j$ が成立つよう $x_j \in \mathbb{C}^n$ を取り，各ベクトル x_j を第 j 列に持つ n 次正方行列を $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ で表すと

$$A[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [e_1, e_2, \cdots, e_n] = E$$

となる．故に定理 3.1 によって行列 A は正則である． □

3.2 連立方程式の解法と行列の階数

A は (m, n) 型の行列とする．

補題 3.5. 行列 A は，まず行基本変形によって，次の形

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 \ * \cdots * & & & & & \\
& 1 \ * \cdots * & & & & \\
& & 1 & & & \Large{*} \\
& & & \ddots & & \\
& & & & 1 & \\
\hline
& & 0 & & & 0
\end{array}\right)$$

に変形され, 引き続いて列基本変形を施すことによって，次の形

$$r\left\{\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \Big| & 0 \\ \hline 0 & \Big| & 0 \end{pmatrix}\right. = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

に変形される．このとき, 最後に現れる非負整数 r は，上に述べたような行と列の基本変形の仕方にはよらず, 行列 A に対して一意的に定まる．この数を $\operatorname{rank} A$ と表し，行列 A の**階数** (rank) と呼ぶ.

Proof. 行列の階数が，変形に用いた行と列の基本変形の選び方にはよらないことを，背理法で証明しよう．与えられた行列 A が，行と列についての何回かの基本変形の後に，次の二通りの形

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

に変形され，$r < s$ であったと仮定する.

$$Q_1AP_1 = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad Q_2AP_2 = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる m 次正方行列 Q_1, Q_2 と n 次正方行列 P_1, P_2 を取る．すると

$$A = Q_1^{-1}\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P_1^{-1} = Q_2^{-1}\left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P_2^{-1}$$

であるから

$$(Q_2Q_1^{-1})\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)(P_2^{-1}P_1)$$

を得る．$Q = Q_2Q_1^{-1}$, $P = P_2^{-1}P_1$ と置く．故に Q は m 次正則行列，P は n 次正則行列であって等式

$$Q\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P$$

が成立つ．この等式の両辺をそれぞれ計算すれば

$$\left(\begin{array}{c|c} Q\text{ の始めの } r\text{ 列} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} P\text{ の始めの } s\text{ 行} \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

となる．ここで $r < s$ であるから行列 P は次のような形

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} & 0 & \\ P' & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ \hline * & & * \end{array}\right)$$

をしていることになる．但し，行列 P' は P の始めの s 個の行と始めの $s-1$ 個の列とが作る行列を表している．さてそこで，行列 P' に行と列の基本変形を施して，行列 P' が

$$\left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

という形になるまで変形する．このときここに現れる単位行列 E_k の型 k は $0 \leq k \leq s-1$ であるから，正則行列 P は何回かの行と列の基本変形の後にその第 s 行が 0 になることがわかる．しかしながら，正則行列の積は正則であるので，正則行列は行や列にどのように基本変形を施しても正則のままであるから，これは命題 2.4 に反する． □

命題 3.6. A を n 次正方行列とすれば，A が正則であるための必要十分条件は，等式 $\operatorname{rank} A = n$ が成立つことである．

Proof. 行列 A が正則なら，A は行についての基本変形のみで単位行列 E_n に変形される．故に $\operatorname{rank} A = n$ である．逆に $\operatorname{rank} A = n$ なら，行列 A は何回かの行と列の基本変形により単位行列に変形されるので，n 次正則行列 P, Q が存在して等式 $PAQ = E_n$ が成立つ．故に A は正則である． □

補題 3.5 は連立方程式を解くアルゴリズム（実際的な方法）を述べたものである．連立方程式 $(*)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

は，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と置いて，等式 $Ax = 0$ と看做すことができる．さて $\operatorname{rank} A = r$ とすると，m 次正則行列 Q と n 次正則行列 P を見つけて

$$QAP = \left(\begin{array}{c|ccc} & c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \\ E_r & & \vdots & \\ & c_{r1} & \cdots & c_{r\ell} \\ \hline 0 & & 0 & \end{array}\right)$$

という形にできる筈である．但し $\ell = n - r$ である．すると $Ax = 0$ であるから $(QAP)(P^{-1}x) = Q(Ax) = 0$. よって連立方程式 $Ax = 0$ を解くことと連立方程式 $(QAP)(P^{-1}x) = 0$ を解くことは同値である．即ち，連立方程式

$$(**) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & c_{ij} \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \end{array}\right) = 0$$

を解いて，その解 $z \in \mathbb{C}^n$ に対し $x = Pz$ と置いたものが，連立方程式 (*) の解に他ならない．勿論 $(**)$ の解は

$$\begin{cases} x_1 = -(c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1\ell}y_\ell) \\ x_2 = -(c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2\ell}y_\ell) \\ \qquad \vdots \\ x_r = -(c_{r1}y_1 + c_{r2}y_2 + \cdots + c_{r\ell}y_\ell) \end{cases}$$

($y_1, y_2, \cdots, y_\ell$は任意) であるから，ベクトルを用いて記述すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1\ell}y_\ell) \\ \vdots \\ -(c_{r1}y_1 + c_{r2}y_2 + \cdots + c_{r\ell}y_\ell) \\ y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \end{pmatrix} \\ &= y_1 \left(\begin{array}{c} -c_{11} \\ \vdots \\ -c_{r1} \\ \hline e_1 \end{array}\right) + y_2 \left(\begin{array}{c} -c_{12} \\ \vdots \\ -c_{r2} \\ \hline e_2 \end{array}\right) + \cdots + y_\ell \left(\begin{array}{c} -c_{1\ell} \\ \vdots \\ -c_{r\ell} \\ \hline e_\ell \end{array}\right) \end{aligned}$$

となる．ここで $\{e_j\}_{1\le j\le \ell}$ は $(\ell,1)$ 型の単位ベクトルを表す．この等式から, 連立方程式 $(*)$ には **基本解** $\{P\begin{pmatrix} -c_{1j} \\ \vdots \\ -c_{rj} \\ \hline e_j \end{pmatrix}\}_{1\le j\le \ell}$ が丁度 ℓ 個あり, 残りの解はそれらの**一次結合**（定義 4.1 参照）であることが従う．行列 P は正則であるから，残りの解を基本解の一次結合として表す表現の仕方は一意的である.

以上の議論を纏めて，次の定理が得られる.

定理 3.7. 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

に対し，$A = (a_{ij})$ と置き $\mathrm{rank}A = r$ とすると，この連立方程式は丁度 $\ell = n - r$ 個の基本解を持ち，一般解はそれら ℓ 個の基本解の一次結合として一意的に表される．この方程式が自明な解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみを持つための必要十分条件は，$n = r$ である.

系 3.8. 未知数の個数 n が方程式の個数 m より大ならば，連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

は，必ず非自明な解を持つ.

行列の変形という観点から連立方程式を解いてみよう.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 11x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ 12x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

を考える．$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 11 & 4 & 3 & -10 \\ 12 & 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とおく．方程式 $Ax = 0$ を解くわけであるから，まず行列 A の変形を行う．始めの 2 列を入れ替え，行変形を行う.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 11 & 4 & 3 & -10 \\ 12 & 5 & 2 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 11 & 3 & -10 \\ 5 & 12 & 2 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式 $Bx = 0$ を解いて

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

従って

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故に方程式 $Bx = 0$ の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（x_3, x_4 は任意）である．この解はそのまま連立方程式方程式 $Ax = 0$ の解になっているわけではない．連立方程式 $Ax = 0$ の正確な解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（x_3, x_4 は任意）である．行列 A を変形して行列 B に至る過程で用いられた**列基本変形**に対応した**行変形**（この場合は，未知数 x_1 と x_2 の入れ替え）を方程式 $Bx = 0$ の解 x に施す必要があるからである．

4　ベクトル空間と行列

4.1　部分空間

$\mathbb{C}^n$ によって n 次列ベクトルの全体よりなる集合を表す．

定義 4.1. $x_1, x_2, \cdots, x_\ell \in \mathbb{C}^n$ とする．$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_\ell x_\ell$ $(c_i \in \mathbb{C})$ という形のベクトルを $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ の**一次結合**と呼ぶ．

定義 4.2. $x_1, x_2, \cdots, x_\ell \in \mathbb{C}^n$ のとき，ベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ が**一次独立である**とは，スカラー $\{c_i \in \mathbb{C}\}_{1 \leq i \leq \ell}$ について，$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_\ell x_\ell = 0$ ならば必ず $c_1 = c_2 = \cdots = c_\ell = 0$ が成立つことを言う．

例えば, $n=3$ とし，ベクトル

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ y_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ y_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ y_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

を考える．x_1,x_2,x_3 は一次独立であるが, y_1,y_2,y_3 は一次独立ではない. 実際, y_1,y_2,y_3 について見れば，$y_1+y_2+(-1)y_3=0$ だからであり，x_1,x_2,x_3 については，c_1,c_2,c_3 を未知数とする連立方程式

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$$

の解は $c_1=c_2=c_3=0$ だけだからである.

定理 4.3. *n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は, その n 個の列ベクトルが一次独立であることである.*

Proof. $A=(a_{ij})$ とする．$c_1,c_2,\cdots,c_n$ を未知数とする連立方程式

$$c_1\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

が自明でない解を持たないことと，行列 A の列ベクトルが一次独立であることは同値である. 故に系 3.4 より，行列 A が正則であるための必要十分条件は, その n 個の列ベクトルが一次独立であることが従う. □

定義 4.4. *W を $\mathbb{C}^n$ の部分集合とする. 次の 2 条件が満たされるとき，W は $\mathbb{C}^n$ の部分空間であるという.*
(1) $\emptyset\neq W\subseteq\mathbb{C}^n$ である.
(2) $x,y\in W$，$\lambda\in\mathbb{C}$ ならば，$x+y,\lambda x\in W$ である.

従って, W が $\mathbb{C}^n$ の部分空間なら，任意の $x_i\in W$ と $\lambda_i\in\mathbb{C}$ $(1\leq i\leq\ell)$ に対し，$\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_ix_i=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_\ell x_\ell\in W$ である. また $0\in W$ である.

補題 4.5. *(1) $\{0\},\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間である.*
(2) A を (m,n) 型の行列とする．連立方程式 $Ax=0$ の解の全体よりなる集合は，$\mathbb{C}^n$ の部分空間である.
(3) $x_i\in\mathbb{C}^n$ $(1\leq i\leq\ell)$ を取り，$W=\{\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_ix_i\mid\lambda_i\in\mathbb{C}\ (1\leq i\leq\ell)\}$ とおく. このとき集合 W は $\mathbb{C}^n$ の部分空間である.

以下 (3) の部分空間 W を，$\langle x_1, x_2, \cdots, x_\ell \rangle$，$\mathbb{C}x_1 + \mathbb{C}x_2 + \cdots + \mathbb{C}x_\ell$，又は $\sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{C}x_i$ と書く．任意の $1 \leq i \leq \ell$ について必ず $x_i \in \langle x_1, x_2, \cdots, x_\ell \rangle$ となっていることに注目せよ．

Proof. 部分空間の定義を満たすことを確かめる．(1) は明らかである．

(2) $W = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = 0\}$ とおく．$0 \in W$ であるから，$W \neq \emptyset$ である．$x, y \in W, \lambda \in \mathbb{C}$ とせよ．$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$ であるから，$x + y \in W$ である．一方で $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda 0 = 0$ であるから，$\lambda x \in W$ である．以上により，集合 W は $\mathbb{C}^n$ の部分空間である．

(3) $x_i = \sum_{j=1}^{\ell} \delta_{ij} x_j$ であるから $x_i \in W$ $(1 \leq i \leq \ell)$ が得られる．故に $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{C}^n$ である．$x, y \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$ とせよ．$x = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i$ $y = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i x_i$ $(\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C})$ と書く．すると $x + y = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{\ell} (\lambda_i + \mu_i) x_i$ であるから，$x + y \in W$ である．$\lambda x = \lambda(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{\ell} (\lambda\lambda_i) x_i$ より，$\lambda x \in W$ を得る．故に集合 W は $\mathbb{C}^n$ の部分空間である． □

定理 4.6. $\mathbb{C}^n$ 内では $n+1$ 個以上のベクトルは，決して一次独立ではない．

Proof. $\mathbb{C}^n$ 内に ℓ $(\ell \geq n+1)$ 個のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_\ell \in \mathbb{C}^n$ を取って，$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ と書く．$n < \ell$ であるので，$x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ を未知数とする連立方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1\ell} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} = 0$ は，定理 3.7 によって必ず非自明な解を持つ．故にベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_\ell \in \mathbb{C}^n$ は一次独立でない． □

4.2 次元と基底

定理 4.7. W を $\mathbb{C}^n$ の部分空間とし $W \neq \{0\}$ と仮定する．このとき部分空間 W 内に ℓ $(\ell \geq 1)$ 個の一次独立なベクトル $\{x_1, x_2, \cdots, x_\ell\}$ を取って，等式 $W = \langle x_1, x_2, \cdots, x_\ell \rangle$ が成立つようにできる．このように選んだベクトルの個数 ℓ は，部分空間 W に対し一意的に定まり, ベクトル $\{x_1, x_2, \cdots, x_\ell\}$ の取り方にはよらない．

定理 4.7 の条件を満たすベクトル $\{x_1, x_2, \cdots, x_\ell\}$ を W の一組の**基底**という．一組の基底をなすベクトルの個数 ℓ を部分空間 W の**次元**と呼び $\dim_{\mathbb{C}} W$ で表す．$W = \{0\}$ のときは，W は空集合 $\emptyset$ を基底に持ち $\dim_{\mathbb{C}} W = 0$ であると考える．

Proof. まず $0 \neq x_1 \in W$ を取る．$\langle x_1 \rangle \subseteq W$ である．$\langle x_1 \rangle \neq W$ なら，$x_2 \in W$ を $x_2 \notin \langle x_1 \rangle$ と取れば，$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subseteq W$ となる．もし $\langle x_1, x_2 \rangle \neq W$ なら，$x_3 \in W$ を $x_3 \notin \langle x_1, x_2 \rangle$ と取れ

ば，$\langle x_1, x_2\rangle \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3\rangle \subseteq W$ となる．この作業は無限に継続することはない．なぜならば，部分空間 W 内にベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ が取れて，各 $1 \leq i \leq \ell$ について $x_i \notin \langle x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}\rangle$ が成立つなら，ベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ は一次独立だからである．実際，$c_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq \ell)$ について等式 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_\ell x_\ell = 0$ が成立つなら，$c_\ell = 0$ でなければならない．さもないと $x_\ell = -(\frac{c_1}{c_\ell}x_1 + \frac{c_2}{c_\ell}x_2 + \cdots + \frac{c_{\ell-1}}{c_\ell}x_{\ell-1}) \in \langle x_1, x_2, \cdots, x_{\ell-1}\rangle$ となるからである．同じ理由で $c_{\ell-1} = 0, c_{\ell-2} = 0, \cdots, c_1 = 0$ が得られる．故に定理 4.6 より，$n \geq \ell$ となり，上の操作は高々 n 回で終了し，一次独立なベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_\ell \in W$ が得られて等式 $W = \langle x_1, x_2, \cdots, x_\ell\rangle$ が成立つ．

次にベクトルの個数 ℓ の一意性を示そう．$W = \langle x_1, x_2, \cdots, x_\ell\rangle = \langle y_1, y_2, \cdots, y_m\rangle$ とする．但しベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ と $y_1, y_2, \cdots, y_m$ は W の元であって一次独立と仮定する．さてどのベクトル x_i も $y_1, y_2, \cdots, y_m$ の一次結合であって，どの y_i も $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ の一次結合であるから $c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{C}$ を取って

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1m}y_m \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2m}y_m \\ \qquad \vdots \\ x_\ell = c_{\ell 1}y_1 + c_{\ell 2}y_2 + \cdots + c_{\ell m}y_m \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1\ell}x_\ell \\ y_2 = d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2\ell}x_\ell \\ \qquad \vdots \\ y_m = d_{m1}x_1 + d_{l2}x_2 + \cdots + d_{m\ell}x_\ell \end{cases}$$

と表わすことができる．故に各 $1 \leq i \leq \ell$ に対し

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}y_j = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(\sum_{k=1}^{\ell} d_{jk}x_k) = \sum_{k=1}^{\ell}(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}d_{jk})x_k$$

となる．$x_i = \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{ik}x_k$ であるから，$\sum_{k=1}^{\ell}(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}d_{jk} - \delta_{ik})x_k = 0$ である．ベクトル $\{x_1, x_2, \cdots, x_\ell\}$ は一次独立であるから，このことは各 i, k について等式 $\sum_{j=1}^{m} c_{ij}d_{jk} = \delta_{ik}$ が成立つことを示し，行列の積に関する等式 $(c_{ij})(d_{ij}) = E_\ell$ が得られる．x_i と y_i の役割を交代すれば，同様にして行列の積に関する等式 $(d_{ij})(c_{ij}) = E_m$ が従う．そこで $x \in \mathbb{C}^\ell$ を取り $(d_{ij})x = 0$ と仮定すれば，$x = E_\ell x = ((c_{ij})(d_{ij}))x = (c_{ij})((d_{ij})x) = (c_{ij})0 = 0$ となる．このことは (m, ℓ) 型の行列 (d_{ij}) の ℓ 個の m 次列ベクトルが一次独立であることを意味し，したがって定理 4.6 によって評価 $\ell \leq m$ が得られる．行列 (c_{ij}) と行列 (d_{ij}) の役割を交代させれば評価 $m \leq \ell$ が得られるので，等式 $\ell = m$ が従う． □

部分空間の定義を満たすことを確認すればよいだけであるから，次の命題の証明は省略する．

命題 4.8. W_1, W_2 を $\mathbb{C}^n$ の部分空間とする．このとき集合 $W_1 \cap W_2$ と $W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$ はどちらも $\mathbb{C}^n$ の部分空間である．

5 行列式

5.1 行列式

$A=(a_{ij})$ は n $(n \geq 2)$ 次正方行列とする．各 $1 \leq i, j \leq n$ に対し，行列 A の i 行と j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の正方行列を $A_{\langle i,j \rangle}$ と書く．

$$A_{\langle i,j \rangle} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

行列 A の行列式 ($\det A$ **あるいは** $|A|$ **で表す**) は，次のように**帰納的**に定義される．

$n=1$ なら $|A|=a_{11}$, $n=2$ なら $|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ と定め，$n \geq 3$ ならば

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} |A_{\langle 1,j \rangle}|.$$

例えば $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とすると，$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ となる．

補題 5.1. 行列式 $|A|$ は，行列 A に対してスカラーを対応させる**関数**であって，行列の列変形に対応する次の性質を持つ．

(1) 各列について線型である（**多重線形性**）．即ち次の等式が成立つ．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

但し c はスカラーである．

(2) 行列 A の**異なる**二つの列が等しいなら行列式の値は 0 である．**異なる**二つの列の入れ替えを 1 回行うと符号が変わる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j \neq k)$$

(3) ある列を何倍かして**他の列**に加えても行列式の値は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k}+ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk}+ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j \neq k)$$

但し c はスカラーである.

(4) $|E| = 1$

Proof. n に関する帰納法を用いて確かめる. (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i}+c_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni}+c_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ とおく. $n=1$ のとき自明に正しいので, $n \geq 2$ で

$n-1$ まで正しいと仮定する．

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k\neq j}(-1)^{k+1}a_{1k}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & b_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1}(b_{1j}+c_{1j})\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(定義より)} \\
&= \sum_{k\neq j}(-1)^{k+1}a_{1k}(\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}) \\
&+ (-1)^{j+1}(b_{1j}+c_{1j})\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{(帰納法の仮定より)} \\
&= (\sum_{k\neq j}(-1)^{k+1}a_{1k}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1}b_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}) \\
&+ (\sum_{k\neq j}(-1)^{k+1}a_{1k}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1}c_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}) \\
&= |B|+|C| \qquad \text{(定義より)}.
\end{aligned}
$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とおく．$n = 1$ のとき自明に正しいので，$n \geq 2$ で $n-1$ まで正しいと仮定する．

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k\neq j}(-1)^{k+1}a_{1k}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1}ca_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(定義より)} \\
&= \sum_{k\neq j}(-1)^{k+1}ca_{1k}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1}ca_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(帰納法の仮定より)} \\
&= c(\sum_{k\neq j}(-1)^{k+1}a_{1k}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1}a_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}) \\
&= c|B| \qquad \text{(定義より)}.
\end{aligned}
$$

(2) $n = 2$ なら主張は明らかに正しい．$n \geq 3$ とし $n-1$ 以下で (2) の主張が正しいと仮定す

る．行列 A はその第 i 列と第 j 列 $(i<j)$ 列が等しいと仮定する．

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+1}a_{1i} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1}a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= a_{1i}((-1)^{(i+1)+(j-i-1)} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2j} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{nj} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}) \\
&= 0 \ \text{（第 j 列を第 i 列の場所に移動させるため，列の入れ替えを $j-i-1$ 回行っている）}
\end{aligned}
$$

後半の主張は多重線型性を用いて前半の主張から導かれる．$1 \leq i < j \leq n$ とし行列 A に対しその第 i 列と第 j 列をどちらも第 i と第 j の和で置き換えた行列を B とする．即ち

$$
B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+a_{1j} & \cdots & a_{1i}+a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+a_{nj} & \cdots & a_{ni}+a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

であるから，勿論 $|B|=0$ である．一方で行列式の多重線型性より

$$
\begin{aligned}
|B| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

であるから等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を得る．

(4) $n=1$ なら自明である．$n \geq 2$ で $n-1$ まで正しいと仮定すると

$$\begin{aligned} |E_n| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \delta_{1k} |E_{\langle 1,k \rangle}| \\ &= |E_{n-1}| \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる．

□

補題 5.1 は，与えられた行列に列基本変形を施したとき，行列式の値がどのように変化するかを記述したものである．即ち，第 i 列と第 j 列を入れ替える基本行列を $P_n(i,j)$，第 i 列を c 倍する基本行列を $Q_n(i;c)$ $(c \neq 0)$，第 i 列を c 倍して j 列に加える基本行列を $R_n(i,j;c)$ $(i \neq j)$ とすれば，等式 $|AP_n(i,j)| = -|A|$，$|AQ_n(i;c)| = c|A|$，$|AR_n(i,j;c)| = |A|$ が成立する．$A = E$ と置くことにより $|P_n(i,j)| = -1$，$|Q_n(i;c)| = c$ $(\neq 0)$，$|R_n(i,j;c)| = 1$ が得られる．以上により，P が基本行列なら $|P| \neq 0$ であって等式 $|AP| = |A||P|$ が成立つことがわかる．従って次の系が正しい．

系 5.2. 任意の n 次正方行列 A と n 次基本行列 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ に対し等式

$$|AP_1P_2 \cdots P_s| = |A||P_1||P_2| \cdots |P_s|$$

が成立つ．故に $|A| = 0$ であるための必要十分条件は $|AP_1P_2 \cdots P_s| = 0$ である．

一般に (m,n) 型行列 $X = (x_{ij})$ に対し，その (i,j) 成分が x_{ji} であるような (n,m) 型行列を ${}^tX$ と書き，行列 A の**転置行列**と呼ぶ．

$${}^t({}^tX) = X, \quad {}^t(XY) = {}^tY{}^tX, \quad {}^tE = E$$

である．故に正方行列 A が正則ならその転置 ${}^tA$ も正則であり，逆も正しい．P が基本行列なら等式 $|{}^tP| = |P|$ が成立つ．

定理 5.3 (行列式の乗法性). A, B は n 次正方行列とする．次が正しい．

(1) 行列 A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である．

(2) $|AB| = |A||B|$.

(3) $|{}^tA| = |A|$.

故に補題 5.1 はすべての主張を「行」に置き換えてもそのまま成立つ．従って

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{\langle i,1 \rangle}|$$

である．

Proof. (1) A が正則なら，定理 2.8 によって A は何個かの基本行列の積である．$P_1, P_2, \cdots, P_s$ を基本行列とし $A = P_1 P_2 \cdots P_s$ とすれば，系 5.2 より等式 $|A| = |P_1||P_2| \cdots |P_s|$ が成立つ．すべての i に対し $|P_i| \neq 0$ であるので，$|A| \neq 0$ である．行列 A が正則でないならば，系 3.4 より A の n 個の列は一次独立ではない．故に列に関する基本変形の後に行列 A の第一列は 0 となる．即ち何個かの基本行列 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ を取って積 $B = A(P_1 P_2 \cdots P_s)$ を作ると，その第一列は 0 となる．補題 5.1(1) より $|B| = 0$ であるから，系 5.2 より $|A| = 0$ を得る．

(2) 行列 B が正則でないならば，定理 3.1 より AB も正則ではないので，(1) より等式 $|A||B| = 0 = |AB|$ を得る．B は正則であると仮定しよう．B は何個かの基本行列の積である．基本行列 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ を取って $B = P_1 P_2 \cdots P_s$ と表すと，系 5.2 により等式 $|AB| = |AP_1 P_2 \cdots P_s| = |A||P_1||P_2| \cdots |P_s| = |A||P_1 P_2 \cdots P_s| = |A||B|$ が得られる．

(3) A が正則でないならば ${}^tA$ も正則でないので，$|A| = 0 = |{}^tA|$ である．行列 A が正則なら，A を基本行列の積 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$ と表わすと，${}^tA = {}^tP_s {}^tP_{s-1} \cdots {}^tP_1$，$|{}^tP_i| = |P_i|$ であるので，(2) より等式 $|{}^tA| = |{}^tP_s {}^tP_{s-1} \cdots {}^tP_1| = |{}^tP_s||{}^tP_{s-1}| \cdots |{}^tP_1| = |P_s||P_{s-1}| \cdots |P_1| = |P_1||P_2| \cdots |P_s| = |P_1 P_2 \cdots P_s| = |A|$ が従う． □

定理 5.4. $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とすれば，等式

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

が成立つ．ここで S_n は n 次対称群であって $\varepsilon(\sigma)$ は置換 σ の符号を表す．

Proof. 行列 $A = (a_{ij})$ の第 j 列 a_j を単位ベクトル e_i $(1 \leq i \leq n)$ の一次結合として表せば $a_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ となる．n 個の n 次ベクトル $b_1, b_2, \cdots, b_n$ を並べてできる n 次正方行列を $[b_1, b_2, \cdots, b_n]$ で表すことにすれば，$A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ となる．$a_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ であるから，行列式の多重線型性を繰り返し用いることによって，等式 (*)

$$|A| = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}|[e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]|$$

が得られる．ここで添え字 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ は独立に 1 から n まで動くのである．一方で行列式の性質 5.1(2) より，異なる二つの列が等しい行列の行列式は 0 であるから，上の等式 $(*)$ の右辺で添え字 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ は 1 から n をすべて走る必要はなく，$1, 2, \cdots, n$ の並べ替えだけを動けばよい．$i_1, i_2, \cdots, i_n$ が $1, 2, \cdots, n$ の順列であるとき，$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}$ は $e_1, e_2, \cdots, e_n$ の並べ替えであり，補題 5.1(4) により単位行列 $E = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$ の行列式の値は 1 であるから，行列式 $|[e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}]|$ の値は $1, 2, \cdots, n$ を並べ替えて $i_1, i_2, \cdots, i_n$ にする際に何個互換が必要かという個数，即ち置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ の符号に等しい．故に等式

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

が従う． □

5.2 余因子行列

定義 5.5. A は n $(n \geq 2)$ 次正方行列とせよ．各 $1 \leq i, j \leq n$ に対し，$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{\langle j,i \rangle}|$ と置き, n 次正方行列 $\widetilde{A}$ を $\widetilde{A} = (\Delta_{ij})$ によって定める．$\widetilde{A}$ を A の**余因子行列**と呼ぶ.

定理 5.6. $\Delta = |A|$ とすれば等式 $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = \Delta E$ が成立つ.

即ち, 任意の $1 \leq i, k \leq n$ に対し，$\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\Delta_{jk} = \delta_{ik}\Delta$, $\sum\limits_{j=1}^n \Delta_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}\Delta$であって，等式 $\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{\langle i,j \rangle}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}a_{ji}|A_{\langle j,i \rangle}|$ が成立つ.

Proof.

$$\begin{aligned}\alpha := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{jk} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{j+k}|A_{\langle k,j\rangle}| \\ &= (-1)^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{ij}|A_{\langle k,j\rangle}|\right)\end{aligned}$$

であり一方で定義により

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{ij}|A_{\langle k,j\rangle}| = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \cdots & a_{k-1\,n} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

である．$i \neq k$ のときは，異なる二つの行が等しいので，行列式の性質 5.1 を行に適用すれば，最後の行列式が 0 になることがわかる．よって $\alpha = (-1)^{k-1}0 = 0$ である．$i = k$ のときは，この行列式は行を $i-1$ 回入れ替えることによって Δ に等しくなる．従ってこの行列式の値は $(-1)^{i-1}\Delta$ である．故に等式 $\alpha = (-1)^{i-1}[(-1)^{i-1}\Delta] = \Delta$ が得られる．同様に

$$\begin{aligned}\beta := \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}a_{jk} &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}|A_{\langle j,i\rangle}|a_{jk} \\ &= (-1)^{i-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{jk}|A_{\langle j,i\rangle}|\right)\end{aligned}$$

であり一方で

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{jk}|A_{\langle j,i\rangle}| = \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{nk} & a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

である．$i \neq k$ のときは上に述べた理由によって（但し今度は列を考える）最後の行列式の値は 0 になり，$\beta = 0$ を得る．$i = k$ のときも同様に行列式は $(-1)^{i-1}\Delta$ となり，等式 $\beta = \Delta$ が得られる． □

系 5.7. *A が正則ならば $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\widetilde{A}$ である．*

Proof. $(\frac{1}{\Delta}\widetilde{A})A = A(\frac{1}{\Delta}\widetilde{A}) = E$ による． □

試しに $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ として，A^{-1} を計算してみよう．$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 21+0+0-12-0-0 = 9$ である．また $\Delta_{11} = (-1)^2|A_{\langle 1,1\rangle}| = 3$, $\Delta_{12} = (-1)^3|A_{\langle 2,1\rangle}| = 3$, $\Delta_{13} = (-1)^4|A_{\langle 3,1\rangle}| = -3$, $\Delta_{21} = (-1)^3|A_{\langle 1,2\rangle}| = -5$, $\Delta_{22} = (-1)^4|A_{\langle 2,2\rangle}| = 1$, $\Delta_{23} = (-1)^5|A_{\langle 3,2\rangle}| = 2$, $\Delta_{31} = (-1)^4|A_{\langle 1,3\rangle}| = -4$, $\Delta_{32} = (-1)^5|A_{\langle 2,3\rangle}| = -1$, $\Delta_{33} = (-1)^6|A_{\langle 3,3\rangle}| = 7$ となる．故に $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ である．実際

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E$$

となる．拡大行列 $(A|E)$ を用いる方法と比べると効率は良くないが，理論的な整合性は非常に美しい．

系 5.8 (クラーメルの定理)． *A が正則なら連立方程式 $Ax = a$ は唯一の解 $x = (\frac{1}{\Delta}\widetilde{A})a$ を持つ．*

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とせよ．$\Delta = ad - bc$ である．$\Delta \neq 0$ なら A は正則であって，$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2|A_{\langle 1,1\rangle}| & (-1)^3|A_{\langle 2,1\rangle}| \\ (-1)^3|A_{\langle 1,2\rangle}| & (-1)^4|A_{\langle 2,2\rangle}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となる．故に $Ax = a$ の解は $x = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ である．

6 線型写像

6.1 線型写像と行列

定義 6.1. 写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ が**線型である**とは，任意の $x, y \in \mathbb{C}^n$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し等式

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

が成立つことをいう．

A を (m,n) 行列とし写像 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ を $f(x)=Ax\ (x\in\mathbb{C}^n)$ と定めれば，f は線型である．逆も正しい．即ち

定理 6.2. 写像 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ が線型ならば, 任意の $x\in\mathbb{C}^n$ に対して $f(x)=Ax$ を満たすような (m,n) 型の行列 A が一意的に定まる．この行列を f の**表現行列**という．

Proof. $\{e_j\}_{1\le j\le n}$ を n 次単位ベクトル，$a_j=f(e_j)$ とし，$A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ と置く．すると任意の $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ に対し $x=\sum_{j=1}^n x_je_j$ であるから，等式

$$f(x)=f(\sum_{j=1}^n x_je_j)=\sum_{j=1}^n x_jf(e_j)=\sum_{j=1}^n x_ja_j=Ax$$

が成立つ．(m,n) 型の行列 B があってすべての $x\in\mathbb{C}^n$ に対して等式 $f(x)=Bx$ が成立つなら，特に $Ae_j=f(e_j)=Be_j$ であるから，行列 A と B は対応するすべての列が等しい．故に $A=B$ である． □

線型写像 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ をとり，その表現行列を A とする．

$$\mathrm{Ker}\,f=\{x\in\mathbb{C}^n\mid f(x)=0\},\quad \mathrm{Im}f=\{f(x)\mid x\in\mathbb{C}^n\}$$

と置き，それぞれ f の核，f の像と呼ぶ．$\mathrm{Ker}\,f=\{x\in\mathbb{C}^n\mid Ax=0\}$ であるから，$\mathrm{Ker}\,f$ は連立方程式 $Ax=0$ の解空間に他ならない．また，行列 A の列ベクトルを $a_1,a_2,\cdots,a_n$ とすれば，$f(\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix})=A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n$ であるから，等式 $\mathrm{Im}f=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ が得られる．故に $\mathrm{Ker}\,f$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間であり，$\mathrm{Im}f$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間である．

補題 6.3. $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ は線型写像とし A をその表現行列とする．このとき f が単射であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\,f=\{0\}$，すなわち連立方程式 $Ax=0$ が自明な解しか持たないことである．

Proof. $x,y\in\mathbb{C}^n$ とすれば，$f(x-y)=A(x-y)=Ax-Ay=f(x)-f(y), f(0)=A0=0$ が成立つ．故に，$\mathrm{Ker}\,f=\{0\}$ のとき，$f(x)=f(y)$ ならば，$f(x-y)=0$ であるから $x-y\in\mathrm{Ker}\,f=\{0\}$ となり，$x-y=0$ 即ち $x=y$ を得る．故に f は単射である．逆に f が単射ならば，任意の $x\in\mathrm{Ker}\,f$ について，$f(x)=0=f(0)$ であるから，$x=0$ となり，等式 $\mathrm{Ker}\,f=\{0\}$ が従う． □

命題 6.4. $g:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$, $f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^\ell$ は線型写像とする．A を写像 f の表現行列, B を写像 g の表現行列とすれば, 合成写像 fg は線型であってその表現行列は AB に等しい．

Proof. $x \in \mathbb{C}^n$ とすれば，$(fg)(x) = f(g(x)) = f(Bx) = A(Bx) = (AB)x$ である．故に AB は線型写像 fg の表現行列である． □

命題 6.5. $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は線型写像とする．このとき次の条件は同値である．

(1) f は全単射である．

(2) f は単射である．

(3) f は全射である．

(4) f の表現行列 A は正則である．

Proof. (1) ⇒ (2) 自明である．

(2) ⇔ (4) 系 3.4 と補題 6.3 による．

(4) ⇔ (3) f が全射であるとは，各 $y \in \mathbb{C}^m$ に対し，等式 $y = f(x) = Ax$ を満たすような $x \in \mathbb{C}^n$ が少なくとも一つ存在することである．故に系 3.4 により，条件 (3) と (4) は同値である．

(3) ⇒ (1) f が全射なら，行列 A は正則であるので，f は単射である．故に f は全単射である． □

6.2 次元公式

定理 6.6 (次元公式). $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を線型写像としその表現行列を A とすれば，次の等式が成立つ．

(1) $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$.

(2) $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} f = n$.

Proof. (1) 行列 A の列ベクトルを $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とする．$\operatorname{Im} f = \langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ である．$s = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} f$ と置き，ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の中から $\operatorname{Im} f$ の基底を選び（この選択は可能である．定理 4.7 の証明を吟味せよ），これを $b_1, b_2, \cdots, b_s$ とすると，$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \cdots, b_s \rangle$ であるから，行列 A は列に関する基本変形によって次の形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_s & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

に変形される．ベクトル $b_1, b_2, \cdots, b_s$ は一次独立であるから，行列 $B = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_s)$ を係数とする連立方程式 $Bx = 0$ は自明な解しか持たない．故に定理 3.7 から等式 $\operatorname{rank} B = s$ が従い，必要な行と列に関する基本変形を追加することにより，行列 A が最終的に次の形

$$\left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

に変形されることがわかる．故に $s = \operatorname{rank} A$ である．

(2) $\operatorname{Ker} f$ は連立方程式 $Ax = 0$ の解空間である．解空間は $\ell = n - \operatorname{rank} A$ 個の基本解 $\{a_1, a_2, \cdots, a_\ell\}$ を持ち等式 $\operatorname{Ker} f = \langle a_1, a_2, \cdots, a_\ell \rangle$ が成立つ．基本解は一次独立であるから，$\{a_1, a_2, \cdots, a_\ell\}$ は解空間 $\operatorname{Ker} f$ の基底であり，故に等式 $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} f = n$ が成立つ． $\square$