目 次

第1章　Cohen-Macaulay Type

1.1　準備

以下, $(R,\mathfrak{m})$ を a Noetherian local ring とする.

Lemma 1.1.1. *$M,N\in\underline{\underline{M}}(R)$, $I=(0)\underset{R}{:}M$ とする. そして $f_1,\cdots,f_n\in I$ を an N-regular sequence とすると*

$$\mathrm{Ext}_R^i(M,N)\cong\mathrm{Hom}_R\,(M,N_n)\quad where\ N_n=N/(f_1,\cdots,f_n)N$$

である.

Proof. n についての induction で示す. $n=1$ とする.

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{\widehat{f_1}}N\longrightarrow N_1\longrightarrow 0\quad exact$$

であるから

$$0\to\mathrm{Hom}_R(M,N)\xrightarrow{\widehat{f_1}}\mathrm{Hom}_R(M,N)\to\mathrm{Hom}_R(M,N_1)\to\mathrm{Ext}_R^1(M,N)\xrightarrow{\widehat{f_1}}\cdots\quad exact$$

を得るが $\widehat{f_1}=0$ であることから直ちに $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)\cong\mathrm{Hom}_R(M,N_1)$ をうる.
$n>1$ として $n=1$ 以下まで正しいとする. $\mathrm{grade}_N\,M\geq n$ より

$$0\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^i(M,N)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^i(M,N_1)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,N)\longrightarrow 0\quad exact\ for\ {}^\forall i.$$

を見るに $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(M,N_1)\cong\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ を得る. $f_2,\cdots,f_n\in I$ は an N_1-regular sequence であるから induction の仮定を見るに $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)\cong\mathrm{Ext}_R^{n-1}(M,N_1)\cong\mathrm{Hom}_R(M,N_n)$ となる. □

Lemma 1.1.2. *$M,N\in\underline{\underline{M}}(R)$ として $d=\dim_R M$, $t=\mathrm{depth}_R\,N$ とすると $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=(0)$ for ${}^\forall i<d-t$ である.*

Proof. $\mathrm{Ext}_R^i(0,*)=(0)$, $\mathrm{Ext}_R^i(*,0)=(0)$ $({}^\forall i)$ より $M\neq(0)$, $N\neq(0)$ としてよい. d についての induction で証明する. $d=0$ とする. $t=0$ は自明. $t=1$ のときは $\mathrm{Ass}_R\,\mathrm{Hom}_R(M,N)=\mathrm{Supp}_R\,M\cap\mathrm{Ass}_R\,N=\{\mathfrak{m}\}\cap\mathrm{Ass}_R\,N=\emptyset$ より $\mathrm{Hom}_R(M,N)=(0)$ である. $t>1$ として $t-1$ 以下で正しいとすれば, $f_1,\cdots,f_t\in\mathfrak{m}$ を N-regular sequence とし $\overline{N}=N/f_1N$ とおくと ${}^\forall i\in\mathbb{Z}$ について

$$0\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^i(M,N)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^i(M,\overline{N})\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,N)\longrightarrow 0\quad exact$$

であるから induction の仮定より $i<t-1$ であれば $\mathrm{Ext}_R^i(M,\overline{N})=(0)$. $\therefore{}^\forall i<t$, $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=(0)$.
$d>0$ として $d-1$ 以下で正しいとする. このとき

$$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_\ell=(0)\quad where\ M_i/M_{i+1}\cong R/P_i\ for\ some\ P_i\in\mathrm{Spec}\,R\ (0\leq i\leq\ell-1)$$

をとる. $\dim_R M_i/M_{i+1} = \dim R/P_i$ であるから $\dim R/Q \le d$ となる $Q \in \operatorname{Spec} R$ をとり $\operatorname{Ext}^i_R(R/Q, N) = (0)$ for ${}^\forall i < t-d$ を示せば十分. induction の仮定から $\dim R/Q = d$ としてよい. $d > 0$ より $Q \subsetneq \mathfrak{m}$. $\therefore {}^\exists f \in \mathfrak{m} \backslash Q$.

$$0 \longrightarrow R/Q \xrightarrow{\widehat{f}} R/Q \longrightarrow R/(f)+Q \longrightarrow 0 \quad \textit{exact}$$

より ${}^\exists$a long exact

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^i_R(R/(f)+Q, N) \to \operatorname{Ext}^i_R(R/Q, N) \xrightarrow{\widehat{f}} \operatorname{Ext}^i_R(R/Q, N) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/(f)+Q, N) \to \cdots.$$

そして $\dim R/(f)+Q = d-1$ であるから仮定により ${}^\forall i < t-(d-1) = t-d+1$ に対して $\operatorname{Ext}^i_R(R/(f)+Q, N) = (0)$ である. $\therefore \widehat{f} : \operatorname{Ext}^i_R(R/Q, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^i_R(R/Q, N)$ for ${}^\forall i < t-d$. $\therefore \operatorname{Ext}^i_R(R/Q, N) = (0)$ for ${}^\forall i < t-d$. □

Corollary 1.1.3. *$M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ をとり $t = \operatorname{depth}_R M$, $d = \dim R/P$ ($P \in \operatorname{Spec} R$) とすると ${}^\exists f_1, \cdots, f_{t-d} \in P$ s,t an M-regular sequence.*

Lemma 1.1.4. *$(S, \mathfrak{n})$ は a Noeth local で, $\varphi : R \to S$ は a finite homomorphism of rings とする. そして $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ をとり S-module としても有限生成であるとする. このとき次の条件は同値である.*

(1) *M は a C-M R-module である.*
(2) *M は a C-M S-module である.*

Proof. $\sqrt{\mathfrak{m}S} = \mathfrak{n}$ であるから $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{H}^i_{\mathfrak{n}}(M)$ for ${}^\forall i$ を見よ. □

Lemma 1.1.5. *R は a C-M local ring として $P \in \operatorname{Spec} R$ をとると*

$$\dim R/P = \dim \widehat{R}/Q \quad \textit{for } {}^\forall Q \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{R}_Q/P\widehat{R}$$

をみたす.

Proof. ${}^\forall Q \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{R}/P\widehat{R}$ をとれば $P = Q \cap R$ であって, このとき $R_P \to \widehat{R}_Q$ は flat local であるから $\dim R_P + \dim R/P = \dim \widehat{R}_Q + \dim \widehat{R}/Q$ をうる. よって $\dim R_P = \dim \widehat{R}_Q$ を示せばよい. これは $\widehat{R}_Q$ は a C-M local ring であって $\dim \widehat{R}_Q = \dim R_P + \dim \widehat{R}_Q/P\widehat{R}_Q$, $Q\widehat{R}_Q \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}_Q} \widehat{R}_Q/P\widehat{R}_Q$ であることから明らかである. □

Lemma 1.1.6. *A; a commutative ring, $(0) \ne M \in A-\mathrm{mod}$ とする. 次は同値である.*

(1) *$\mathrm{E}_A(M)$ は indecomposable.*
(2) *(0) は直既約.*
(3) *$(0) \ne {}^\forall X \subseteq M$ は essential.*
(4) *$\mathrm{E}_A(X) \cong \mathrm{E}_A(M)$ for $(0) \ne {}^\forall X \subseteq M$.*

Proof. (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3)$\Rightarrow$(4) は明らか.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "g"] & \\
 & \mathrm{E}_A(X) & \mathrm{E}_A(M) \arrow[l, "\exists h"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

とする. $0 \neq {}^{\forall}m \in M$ をとる. $0 \neq g(m) \in \mathrm{E}_A(M)$ より $x = h(g(m)) \in \mathrm{E}_A(X)$ とかくと $x \neq 0$ である.
$\therefore {}^{\exists}a \in A$, ${}^{\exists}y \in X$ s,t $f(ay) = x$. このとき $ay = m$ となる. $\square$

Lemma 1.1.7. A; *acommutative ring,* $(0) \neq X \in A - \mathrm{mod}$ *s,t* $(0) = X_1 \cap \cdots \cap X_n$ $(n > 0)$ 無駄のない分解 $\left(i, e \quad X_i \not\subseteq \bigcap_{j \neq i} X_j \quad for\ {}^{\forall}i \right)$ であってかつ $X_i \subset X$; *irreducible.* $\Rightarrow$ $\mathrm{E}_A(X) = \oplus \mathrm{E}_A(X/X_i)$.

Proof.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \oplus X/X_i \arrow[d] \\
 & \mathrm{E}_A(X) & \oplus \mathrm{E}_A(X/X_i)
\end{tikzcd}
$$

をみて $f : X \to \oplus X/X_i$ が essential であれば十分. $0 \neq {}^{\forall}\alpha \in \oplus X/X_i$ をとり $\alpha = (\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n})$ とかく. そして $\ell = \#\{i | \overline{x_i} \neq 0\}$ とおく. ℓ についての induction で示す. $\ell = 1$ のとき $\alpha = (0, \cdots, 0, \overline{x_i}, 0, \cdots, 0)$ とする. ${}^{\exists}y_i \in \bigcap_{j \neq i} X_j \backslash X_i$ より $(0) \neq A\overline{y_i} \subset X/X_i \ni \overline{x_i}$ であるから上の Lemma から ${}^{\exists}a \in A$ s,t $0 \neq a\overline{x_i} \in A\overline{y_i}$. $\therefore$ $a\overline{x_i} = b\overline{y_i}$ for some $b \in A$. $\therefore f(by_i) = (0, \cdots, 0, a\overline{x_i}, 0, \cdots, 0) = a\alpha$.
$\ell > 1$ として $\ell - 1$ まで正しいとする. ${}^{\forall}i \in \{i | \overline{x_i} \neq 0\}$ をとると ${}^{\exists}(y_i \in X,\ a, b \in A)$ s,t $y_i \in X_j$ $({}^{\forall}j \neq i)$, $y_i \notin X_i$, $0 \neq a\overline{x_i} = b\overline{y_i}$ in X/X_i. よって $a\alpha - bf(y_i) = (a\overline{x_1}, \cdots, 0, \cdots, a\overline{x_n}) =: \xi$ とすると $\xi \neq 0$ である. この ξ については induction から ${}^{\exists}c \in A$ s,t $0 \neq c\xi = f(z)$ for some $z \in X$. $\therefore (ca)\alpha = f(z) + (bc)f(y_i) = f(z + bcy_i)$. 今 $(ca)\alpha \neq 0$ であることが確かめられるので f は essential. $\square$

Corollary 1.1.8. $I \subsetneq R$; *ideal s,t* $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, $I = I_1 \cap \cdots \cap I_\ell$; I_i は *irreducible* であって上の分解は無駄のないものとすれば $\ell = \dim_{R/I} (0) \underset{R/I}{:} \mathfrak{m}$ である.

Corollary 1.1.9. R を *a C-M local ring,* $r = \mathrm{r}_R(R)$ とし $\underline{x}$ を *a maximal R-regular sequence* とすれば

$$I = I_1 \cap \cdots \cap I_\ell \quad for\ some\ I_i \text{は}\ an\ irreducible\ ideal$$

とかける.

Proposition 1.1.10. $\dim R = 0$ とする. 次は同値である.

(1) R は *a Gorenstein local ring* である.
(2) $^\forall I \subseteq R$ *ideal* について
  (*i*) $I = (0) \underset{R}{:} \left((0) \underset{R}{:} I\right)$.
  (*ii*) $\ell_R(I) + \ell_R\left((0) \underset{R}{:} I\right) = \ell_R(R)$.
  をみたす.

Proposition 1.1.11. $\dim R = 1$ とする. 次は同値である.

(1) R は *a Gorenstein local ring* である.
(2) Ra は *irreducible for all* $a \in \mathfrak{m}$, *R-nzd.*
(3) Ra は *irreducible for some* $a \in \mathfrak{m}$, *R-nzd.*
(4) $\ell_R\left(\dfrac{a \underset{R}{:} \mathfrak{m}}{Ra}\right) = 1$.
(5) $\ell_R(\mathfrak{m}^{-1}/R) = 1$ *where* $\mathfrak{m}^{-1} = \{\alpha \in \mathbb{Q}(R) | \alpha\mathfrak{m} \subseteq R\}$.

Proof. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) は明らか. $x \in \mathfrak{m}$; an R-nzd をとる. $^\forall r \in x \underset{R}{:} \mathfrak{m}$ をとれば $r\mathfrak{m} \subseteq (x)$ より $\frac{r}{x} \in \mathfrak{m}^{-1}$ である. $\therefore {}^\exists\widehat{x^{-1}} : x \underset{R}{:} \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^{-1}$, $r \mapsto \frac{r}{x}$. $^\forall \alpha \in \mathfrak{m}^{-1}$ をとり $\alpha = \frac{b}{a}$ とかく. すると $\alpha = \frac{1}{x}\frac{bx}{a}$, $x\alpha = \frac{bx}{a} \in R$ となる. 今 $^\forall m \in \mathfrak{m}$ をとると $m(x\alpha) = (m\alpha)x$ であって, 一方で $\alpha \in \mathfrak{m}^{-1}$ であるから $(m\alpha)x \in Rx$. $\therefore \widehat{x^{-1}}$ は onto. f を $x \underset{R}{:} \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^{-1} \to \mathfrak{m}^{-1}/R$ an R-linear とおくと $\operatorname{Ker} f = Rx$ となるから

$$\frac{x \underset{R}{:} \mathfrak{m}}{Rx} \cong \frac{\mathfrak{m}^{-1}}{R} \quad as\ R-module$$

をうる. よって (4) $\Longleftrightarrow$ (5) をうる. □

1.2 Cohen-Macaulay type

以下, $(R, \mathfrak{m})$ を a Noetherian local ring とする.
$M \in \underline{\underline{M}}(R)$ を a C-M R-module としたとき $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) = (0)$ for $^\forall i < \dim_R M = d$, $\operatorname{Ext}^d_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq (0)$ であった.

Definition 1. M を *a C-M R-module,* $d = \dim_R M$ とするとき

$$\mathrm{r}_R(M) := \dim_{R/\mathfrak{m}} \operatorname{Ext}^d_R(R/\mathfrak{m}, M)$$

と定める. これを M の *the Cohen-Macaulay type* という.

Remark 1.2.1. 次をみたすことが知られている.

(1) M を *a C-M R-module,* $d = \dim_R M$ とするとき $^\forall \underline{f} = f_1, \cdots, f_d \in \mathfrak{m}$; *an M-regular sequence* に対して $\mathrm{r}_R(M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} (0) \underset{M/\underline{f}M}{:} \mathfrak{m}$ である.

(2) R が *a C-M local ring* ならば $\mathrm{r}_R(R) \leq \mathrm{e}(R)$ となりそして R が *a RLR* でないならば $\mathrm{r}_R(R) < \mathrm{e}(R)$ である.

Lemma 1.2.2.

(1) M を *a C-M R-module,* $\underline{f} \subseteq \mathfrak{m}$ を *an M-regular sequence* とすると $\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}_R(M/\underline{f}M)$ である.

(2) $(R, \mathfrak{m}), (S, \mathfrak{n})$ を *Noetherian local rings,* $\varphi : R \to S$ を *onto* として *a C-M R-module M* は *S-module* としても *C-M* であるとすれば $\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}_S(M)$ である.

(3) M; *a C-M R-module.* $\Rightarrow \mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$.

Proof. (1),(3) は自明. $\underline{f} \subset \mathfrak{m}$ を an M-regular sequence as R-module とすると $0 \to M \xrightarrow{\widehat{f_1}} M$; R-exact. $\therefore 0 \to M \xrightarrow{\varphi(f_1)} M$; S-exact. $\therefore \varphi(\underline{f})$ は an M-regular sequence. そして $R/\mathfrak{m} \cong S/\mathfrak{n}$ より $\mathrm{r}_R(M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M/\underline{f}M) = \dim_{S/\mathfrak{n}} \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{n}, M/\varphi(\underline{f})M) = \mathrm{r}_S(M)$. □

Lemma 1.2.3. $(R, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (S, \mathfrak{n})$; *a flat local homomorphism of Noeth local rings* とし M を *a C-M R-module,* $S/\mathfrak{m}S$ を *a C-M local ring* とすると

$$\mathrm{r}_S(S \otimes_R M) = \mathrm{r}_R(M)\, \mathrm{r}_S(S/\mathfrak{m}S)$$

である.

第2章 The Canonical Module

2.1 The canonical module

しばらくは, $(R, \mathfrak{m})$ を a complete Noetherian local ring, $d = \dim R$ とする. さらに $\mathfrak{m}$-adic completion を $\widehat{*}$, $E = \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ で表すことにする.

Definition 2. $^\forall M \in R - \mathrm{mod}$, $^\forall j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathrm{T}_R^j(M) := \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(M), E\right)$$

とかくことにする.

このとき $^\forall M \in R - \mathrm{mod}$, $\dim_R M \leq d$ であるから $\mathrm{T}_R^j = 0$ if $j < 0$ or $d < j$ をうる.
次に $^\forall$exact; $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対しては $^\exists$a long exact sequence

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(Y) \longrightarrow \mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(Z) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}_\mathfrak{m}^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots,$$

s, t Δは *exact* に対して *natural* である.

そして $\mathrm{Hom}_R(*, E)$ は an exact functor であるから $^\exists$a long exact sequence

$$\cdots \longrightarrow T_R^i(Z) \longrightarrow \mathrm{T}_R^i(Y) \longrightarrow \mathrm{T}_R^i(X) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{T}_R^{i+1}(Z) \longrightarrow \cdots,$$

s, t Δは *exact* に対して *natural* である.

又, 一方で $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ where $\Lambda \neq \emptyset$; a set, $M_\alpha \in R - \mathrm{mod}$ for $^\forall \alpha \in \Lambda$ をとると

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_R^j\left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right) &= \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}\left(\bigoplus_\alpha M_\alpha\right), E\right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_\alpha \mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(M_\alpha), E\right) \\
&\cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(M_\alpha), E\right) \\
&= \prod_\alpha T_R^j(M_\alpha)
\end{aligned}$$

をみたす. よって

Theorem 2.1.1. $^{\exists 1} X \in R - \mathrm{mod}$ *s,t* $\mathrm{T}_R^0(\ ) \cong \mathrm{Hom}_R(\ , X)$ *as functors.*

Proof. $\mathrm{K}_R = T_R^0(R)$ とする．${}^\forall M \in R-\mathrm{mod}$ に対して $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^d(M) \cong M \otimes_R \mathrm{H}_\mathfrak{m}^d(R)$ in $R-\mathrm{mod}$ であるから $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^d(M), E\right)$ in $R-\mathrm{mod}$ をうる．そして $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^d(R)$ は an Artinian R-module であるから Matlis duality より ${}^{\exists 1}\,\mathrm{K}_R$ をうる． □

Definition 3. R は *local duality* をみたす．$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(\ ), E\right) \cong \mathrm{Ext}_R^j(\ , \mathrm{K}_R)$ *as functors for* ${}^\forall j \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2.1.2. R は *local duality* をみたす．$\Rightarrow$ $\mathrm{id}_R \mathrm{K}_R = \dim R$.

Proof. ${}^\forall j > d$ に対して $(0) = \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(M), E\right) \cong \mathrm{Ext}_R^j(M, \mathrm{K}_R)$ for ${}^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ をみたす．一方で $\mathrm{Ext}_R^d(R/\mathfrak{m}, \mathrm{K}_R) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^0(R/\mathfrak{m}), E\right) \cong R/\mathfrak{m} \neq (0)$ である．よって $\mathrm{id}_R \mathrm{K}_R = \dim R$ をうる． □

Theorem 2.1.3. R は *a C-M local ring* である．$\Leftrightarrow$ R は *local duality* をみたす．

Proof. $(\Leftarrow)$ $\mathrm{T}_R^j(R) = \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(R), E\right) \cong \mathrm{Ext}_R^j(R, \mathrm{K}_R)$ であるが $j > 0$ ならば $\mathrm{Ext}_R^j(R, \mathrm{K}_R) = (0)$.
$\therefore$ $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(R) = (0)$ if $j \neq 0$. $\therefore$ R は a C-M local ring.
$(\Rightarrow)$ $j \leq 0$ までは正しい．$M, M' \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $M \xrightarrow{\varphi} M'$ an R-linear をとり

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & R^{(I)} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \quad \textit{exact} \\
 & & {\scriptstyle\exists}\downarrow & & {\scriptstyle\exists}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & R^{(I')} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \quad \textit{exact}
\end{array}$$

から

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{T}_R^{j-1}(R^{(I')}) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & \mathrm{Ext}_R^{j-1}(R^{(I')},\mathrm{K}_R) \arrow[dd] \\
\mathrm{T}_R^{j-1}(R^{(I)}) \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & \mathrm{Ext}_R^{j-1}(R^{(I)},\mathrm{K}_R) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{T}_R^{j-1}(L') \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & \mathrm{Ext}_R^{j-1}(L',\mathrm{K}_R) \arrow[dd] \\
\mathrm{T}_R^{j-1}(L) \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & \mathrm{Ext}_R^{j-1}(L,\mathrm{K}_R) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{T}_R^{j}(M') \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & \mathrm{Ext}_R^{j}(M',\mathrm{K}_R) \arrow[d] \\
\mathrm{T}_R^{j}(M) \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d] & & \mathrm{Ext}_R^{j}(M,\mathrm{K}_R) \arrow[ur] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

をみればよい. $\square$

これからは, $R \neq \widehat{R}$ とする.

Lemma 2.1.4. $M, N \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とする. もし $\widehat{R} \otimes_R M \cong \widehat{R} \otimes_R N$ ならば $M \cong N$ である.

Proof. $\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{R} \otimes_R M, \widehat{R} \otimes_R N) \cong \widehat{R} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N)$ であるから $\xi \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{R} \otimes_R M, \widehat{R} \otimes_R N)$, $\widehat{R}$-isomor に対応する $\sum \alpha_i \otimes_R f_i = \sum \alpha_i (1 \otimes_R f_i) \in \widehat{R} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N)$ がとれる. $h : R \to \widehat{R}$ canon, とおくと $\alpha_i \in \widehat{R}$ に対して $^{\exists} a_i \in R$ s,t $\alpha_i = h(a_i) + \beta_i$ for some $\beta_i \in \widehat{\mathfrak{m}}$, そのとき $\sum \alpha_i (1 \otimes_R f_i) \equiv \sum a_i (1 \otimes_R f_i) \bmod \widehat{\mathfrak{m}}$. $\therefore \sum a_i (1 \otimes_R f_i) = \sum 1 \otimes_R a_i f_i = 1 \otimes_R \sum a_i f_i \bmod \widehat{\mathfrak{m}}$. この $1 \otimes_R \sum a_i f_i$ を $1 \otimes_R g$ とかく. すると

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M/\mathfrak{m}M \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\overline{g}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \widehat{M}/\widehat{\mathfrak{m}}\widehat{M} \arrow[d, "\wr"', "\overline{1 \otimes_R g}"] \\
N \arrow[r] & N/\mathfrak{m}N \arrow[r, "\sim"] & \widehat{N}/\widehat{\mathfrak{m}}\widehat{N}
\end{tikzcd}
$$

をみて g は onto. 一方で ξ^{-1} についても同様にすれば ${}^{\exists}g' : N \to M$ an R-linear s,t $g{\cdot}g' = id_N$, $g'{\cdot}g = id_M$.
$\therefore$ g は同型射である. □

Definition 4. $\mathrm{K}_R \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とする.

$$\mathrm{K}_R \text{ は } \textit{the canonical } R-\textit{module} \text{ である}. \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}\left(\mathrm{H}^d_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\ ), \mathrm{E}_{\widehat{R}}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\ , \mathrm{K}_{\widehat{R}}) \quad \textit{as functors.}$$

$R = \widehat{R}$ であれば ${}^{\exists 1}\mathrm{K}_R$ であった. そして上の Lemma から次を得る.

Lemma 2.1.5. ${}^{\exists}\mathrm{K}_R$. $\Rightarrow$ K_R は *unique* である.

Theorem 2.1.6. *R は a C-M local ring とする. 次の条件は同値である.*

(1) ${}^{\exists}\mathrm{K}_R \cong R$.
(2) *R は a Gorenstein local ring である.*

Proof. $R = \widehat{R}$ としてよい.
(2)⇒(1) $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R) = E$ である. $\therefore$ $\mathrm{K}_R = \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R), E\right) = \mathrm{Hom}_R(E, E) \cong R$.
(1)⇒(2) Bass number をみるに

$$\begin{aligned}
\mu^j(\mathfrak{m}, R) = \mu^j(\mathfrak{m}, \mathrm{K}_R) &= \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathrm{Ext}^j_R(R/\mathfrak{m}, \mathrm{K}_R) \\
&= \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^{d-j}_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{m}, E\right) \\
&= \delta_{d,j}.
\end{aligned}$$

よって R は a Gorenstein local ring である. □

Theorem 2.1.7. *$\varphi : R \to A$ a finite homomorphism, $S := A_{\mathfrak{n}'}$, $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}' A_{\mathfrak{n}'}$ として $d = \dim R$, $d - t = \dim S$ とすると*

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}\left(\mathrm{H}^{d-j}_{\mathfrak{m}}(\ ), \mathrm{E}_{\widehat{R}}\right) \cong \mathrm{Ext}_{\widehat{R}}(\ , \mathrm{K}_{\widehat{R}}) \quad \textit{as functors} \quad \textit{for } 0 \leq {}^{\forall}j \leq t$$

である. とくに ${}^{\exists}\mathrm{K}_R$ ならば ${}^{\exists}\mathrm{K}_S \cong \left[\mathrm{Ext}^t_R(A, \mathrm{K}_R)\right]_{\mathfrak{n}'}$ である.

Lemma 2.1.8. *$R = \widehat{R}$, $S = \widehat{S}$ とし, さらに $\varphi : R \to S$ は a finite local homomorphism とすると $\mathrm{E}_S \cong \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R)$ である.*

Proof. ${}^{\forall}M \in S-\mathrm{mod}$, $\mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R)) \cong \mathrm{Hom}_R(S \otimes_R M, \mathrm{E}_R) = \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{E}_R)$ を満たしていた.
従って ${}^{\forall}$exact in $S-\mathrm{mod}$; $0 \to N \to M$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{E}_R) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{E}_R) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R))
\end{tikzcd}$$

を見て $\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R)$ は S-injective である. $(0) \neq \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R)$ は an Artinian であるから $\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R) \subseteq \mathrm{E}^{\alpha}_S$ for some $\alpha > 0$. $\therefore$ $\mathrm{Ass}_S \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R) = \{\mathfrak{n}\}$. そして S は a local ring であるから直既約である. よって $\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R)$ も直既約である.
従って, これらのことから E_S は $\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{E}_R)$ で与えられる. □

Lemma 2.1.9. A は *a semi local Noetherian,* $J = \mathrm{J}(A)$ とし $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とする.

(1) $\widehat{A}^J \cong \bigoplus_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} A} \widehat{A}^{\mathfrak{n}}$.

(2) $\widehat{M}^J \cong \bigoplus_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} A} \widehat{M}^{\mathfrak{n}}$.

但し, $\widehat{M}^{\mathfrak{n}}$ は M の $\mathfrak{n}$*-adic completion* を表す.

Proof. $\operatorname{Max} A = \{\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_s\}$ とかく. すると $J^m = \mathfrak{n}_1^m \cdots \mathfrak{n}_s^m$ $(m > 0)$ をみたすので $A/J^m \cong A/\mathfrak{n}_1^m \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{n}_s^m$ をうる.

$$\therefore \quad \left\{A/J^\ell\right\}_{\ell > 0} \cong \left\{\bigoplus_i A/\mathfrak{n}_i^\ell\right\}_{\ell > 0} \quad \textit{as projective systems.}$$

また $1 \leq {}^\forall i \leq s$ について

$$0 \longrightarrow \{A/\mathfrak{n}_i^\ell\} \longrightarrow \left\{\bigoplus_i A/\mathfrak{n}_i^\ell\right\} \qquad \textit{splitting exact in systems}$$

をみて $\widehat{A}^J \cong \bigoplus_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} A} \widehat{A}^{\mathfrak{n}}$ をうる. また, このとき $\widehat{A}^J_{\mathfrak{n}\widehat{A}} \cong \widehat{A_{\mathfrak{n}}}$ for ${}^\forall \mathfrak{n} \in \operatorname{Max} A$ をみたしている. $\square$

Proof of theorem. $\varphi : R \to A$ は finite であったから A は a semi local であり $\mathfrak{m}A \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}A} = \mathrm{J}(A) =: J$ となるので ${}^\exists k > 0$ s,t $J^k \subseteq \mathfrak{m}A$. よって J-adic completion は $\mathfrak{m}A$-adic completion と同じであるから $\widehat{A}^J \cong \widehat{R} \otimes_R A$ をうる. $\therefore \widehat{R} \to \widehat{A}^J \to \widehat{A}^J_{\mathfrak{n}A} = \widehat{S}$ は finite local. $\therefore \mathrm{E}_{\widehat{S}} = \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}\left(\widehat{S}, \mathrm{E}_{\widehat{R}}\right)$. よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_{\widehat{S}} &\cong \operatorname{Hom}_{\widehat{S}}\left(\mathrm{H}^{d-t}_{\widehat{\mathfrak{n}}}(\widehat{S}), \mathrm{E}_{\widehat{S}}\right) \cong \operatorname{Hom}_{\widehat{S}}\left(\mathrm{H}^{d-t}_{\widehat{\mathfrak{n}}}(\widehat{S}), \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}\left(\widehat{S}, \mathrm{E}_{\widehat{R}}\right)\right) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}\left(\widehat{S} \otimes_{\widehat{R}} \mathrm{H}^{d-t}_{\widehat{\mathfrak{n}}}(\widehat{S}), \mathrm{E}_{\widehat{R}}\right) = \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}\left(\mathrm{H}^{d-t}_{\widehat{\mathfrak{n}}}(\widehat{S}), \mathrm{E}_{\widehat{R}}\right) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}\left(\mathrm{H}^{d-t}_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{S}), \mathrm{E}_{\widehat{R}}\right) \\
&\cong \operatorname{Ext}^t_R\left(\widehat{S}, \mathrm{K}_{\widehat{R}}\right)
\end{aligned}$$

となる. 一方で

$$\begin{aligned}
\widehat{S} \otimes_{A_{\mathfrak{n}}} \left[\operatorname{Ext}^t_R(A, \mathrm{K}_R)\right]_{\mathfrak{n}} &\cong \widehat{S} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A}^J \otimes_A \operatorname{Ext}^t_R(A, \mathrm{K}_R) \\
&\cong \widehat{S} \otimes_{\widehat{A}} \left(\left(\widehat{R} \otimes_R A\right) \otimes_A \operatorname{Ext}^t_R(A, \mathrm{K}_R)\right) \\
&= \widehat{S} \otimes_A \operatorname{Ext}^t_{\widehat{R}}\left(\widehat{R} \otimes_R A, \mathrm{K}_{\widehat{R}}\right) \\
&= \widehat{S} \otimes_A \operatorname{Ext}^t_{\widehat{R}}\left(\widehat{A}^J, \mathrm{K}_{\widehat{R}}\right).
\end{aligned}$$

ここで $\widehat{A}^J = \bigoplus_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} A} \widehat{A}^{\mathfrak{n}}$ より $\widehat{A}^J \ni 1 = \sum e_{\mathfrak{n}}$ where $e_{\mathfrak{n}} = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots, 0)$ となる. このとき ${}^\forall \mathfrak{n} \in \operatorname{Max} A$ に対して $\widehat{A}^{\mathfrak{n}} \ni 1 = e_{\mathfrak{n}}$ であるから, もし $\widehat{S} \neq \widehat{A}^{\mathfrak{n}'}$ ならば $\widehat{S} \otimes \operatorname{Ext}^t_{\widehat{R}}\left(\widehat{A}^{\mathfrak{n}'}, \mathrm{K}_{\widehat{R}}\right) = (0)$ となる.

$$\therefore \quad \widehat{S} \otimes \operatorname{Ext}^t_{\widehat{R}}\left(\widehat{A}^J, \mathrm{K}_{\widehat{R}}\right) = \operatorname{Ext}^t_{\widehat{R}}\left(\widehat{A}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{K}_{\widehat{R}}\right) = \operatorname{Ext}^t_{\widehat{R}}\left(\widehat{S}, \mathrm{K}_{\widehat{R}}\right).$$

$\square$

Example 2.1.10. *R は a Gorenstein local ring であって $R \to S$ は finite local とせよ．このとき $\mathrm{K}_S \cong \mathrm{Ext}_R^t(S,R)$ である．ただし $t = \dim R - \dim S$ とする．*

Lemma 2.1.11. *$(R,\mathfrak{m})$ を a Noeth local, $^\exists \mathrm{K}_R$ とする．そして $A = R[X_1, \cdots, X_n]$ $(n>0)$, $S = A_Q$ $Q \in \mathrm{Spec}\, A$ s,t $\mathfrak{m} = Q \cap R$ とすると $^\exists \mathrm{K}_S \cong S \otimes_R \mathrm{K}_R$ である．*

Proof. $R \to A$ は flat なので $R \to S$ は flat local である．ここで $(R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ flat local, $^\exists \mathrm{K}_R$, if $S/\mathfrak{m}S$ =a Gorenstein local ring. $\Rightarrow$ $^\exists \mathrm{K}_S \cong S \otimes \mathrm{K}_R$. を認めると

$$\frac{A_Q}{\mathfrak{m}A_Q} = \left(\frac{A}{\mathfrak{m}A}\right)_Q = \left(\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)[X_1, \cdots, X_n]\right)_{Q'} \qquad \textit{for some } Q' \in \mathrm{Spec}\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)[X_1, \cdots, X_n]$$

となり $A_Q/\mathfrak{m}A_Q$ は a Gorenstein local ring である． □

Lemma 2.1.12. *$R = \widehat{R}$ とする．*

$$P \in \mathrm{Spec}\, R \ s,t \ \dim R/P + \dim R_P = \dim R \Rightarrow {}^\exists \mathrm{K}_{R_P} \cong R_P \otimes \mathrm{K}_R\,.$$

Proof. $^\exists S$; c,i s,t $R = S/I$ for some $I \subset S$ ideal, $\dim R = \dim S$. ここで $\mathfrak{p} = P \cap S$ とおくと $R_P \cong S_\mathfrak{p} \otimes_S R$ となる．そして $\dim R_P = \dim S_\mathfrak{p}$ をみたすので

$$\begin{aligned} \therefore \quad {}^\exists \mathrm{K}_{R_P} &= \mathrm{Hom}_{S_\mathfrak{p}}(R_P, S_\mathfrak{p}) \\ &= \mathrm{Hom}_{S_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p} \otimes_S R, S_\mathfrak{p}) \\ &= S_\mathfrak{p} \otimes_S \mathrm{Hom}_S(R,S) \\ &= S_\mathfrak{p} \otimes_S (R \otimes_R \mathrm{Hom}_R(R,S)) \\ &= R_P \otimes_R \mathrm{K}_R\,. \end{aligned}$$

□

以下 $(R,\mathfrak{m})$ を a C-M local ring, $\dim R = d$ とする．そして $\widehat{R}$ によって R の $\mathfrak{m}$-adic completion, $E = \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ を表すことにする．

Theorem 2.1.13. *$C \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ について次は同値である．*

(1) *C は the canonical R-module である．*
(2) *$^\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu^i(P,C) = \delta_{i,\mathrm{ht}_R P}$ for all $P \in \mathrm{Spec}\, R$.*
(3) *$\dim_{R/\mathfrak{m}} \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, C) = \delta_{i,d}$.*

Proof. (1)⇒(3) は $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m},C) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-i}(R/\mathfrak{m}), E\right)$ より明らかである．これから (3)⇒(1) を示そう．まず, $\dim_{\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}} \mathrm{Ext}_{\widehat{R}}^i\left(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}, \widehat{R} \otimes_R C\right) = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, C)$ をみて $R = \widehat{R}$ として良い．今, 仮定をみるに $\mathrm{depth}_R\, C = d$ であって更に $0 \to M \to I^{\cdot}$ を M の the min injective resolution とすれば I^i は $i \neq d$ であれば E を直和因子に含まない．ここで $\dim_R M = 0$ とすると $\mathrm{Ext}_R^d(M,C) \cong \mathrm{Hom}_R(M,E)$ を簡単にうる．又 $\mathrm{Ext}_R^i(M,C) = (0)$ $^\forall i \neq d$ も明らか．よって $\dim_R M = 0$ ならば正しい．

Lemma 2.1.14. $^\forall \underline{f} = f_1, \cdots, f_d$ *an R-sop* に対して

$$\varprojlim_{\ell} \mathrm{Hom}_R\left(R/(\underline{f}^{\ell}), E\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R), E\right)$$

である．

Proof. $^\forall \ell > 0$ に対して $\varepsilon : R/(\underline{f}^{\ell}) \to \mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R)$ を canon map とする．$^\forall(\ell > m > 0)$ について

$$\begin{tikzcd}
R/(\underline{f}^{m}) \arrow[rr, "\underline{f}^{\ell-m}"] \arrow[dr, "\varepsilon_m"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & R/(\underline{f}^{m}) \arrow[dl, "\varepsilon_\ell"] \\
& \mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R) &
\end{tikzcd}$$

であるから

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R), E\right) \arrow[dl, "\varepsilon_\ell^*"'] \arrow[dr, "\varepsilon_m^*"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^{\ell}), E) & {} & \mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^{m}), E) \arrow[ll, "\underline{f}^{\ell-m*}"]
\end{tikzcd}$$

をうる．よって $\{\varepsilon.^*\} : \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R), E\right) \to \left\{\mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^{\ell}), E)\right\}$ a map of systems をうる．ここで $X \in R-\mathrm{mod}$, $\{\alpha.\} : X \to \left\{\mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^{\ell}), E)\right\}$ a map of systems をあたえると $^\forall(\ell > m > 0)$ について

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R\left(R/(\underline{f}^{\ell}), E\right) \arrow[rr] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R\left(R/(\underline{f}^{m}), E\right) \\
& X \arrow[ul, "\alpha_\ell"] \arrow[ur, "\alpha_m"'] &
\end{tikzcd}$$

であるから

$$\begin{tikzcd}
X^* & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R) \arrow[ll, "^{\exists 1}\xi"'] \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & R/(\underline{f}^{\ell}) \arrow[ul, "\alpha_\ell^*"'] \arrow[ur, "\varepsilon_\ell"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \\
& R/(\underline{f}^{m}) \arrow[uul, "\alpha_m^*"] \arrow[u] \arrow[uur, "\varepsilon_m"'] &
\end{tikzcd}$$

.

よって

$$
\begin{tikzcd}
X^{**} \arrow[rr, "\xi^*"] \arrow[dr, "\alpha_\ell^{**}"] \arrow[ddr, "\alpha_m^{**}"'] & \circlearrowleft & \mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R)^* \arrow[dl, "\varepsilon_\ell^*"'] \arrow[ddl, "\varepsilon_m^*"] \\
\circlearrowleft & R/(\underline{f}^\ell)^* \arrow[d] & \circlearrowleft \\
& R/(\underline{f}^m)^* &
\end{tikzcd}
$$

をうる．ここで $i : X \to X^{**}$ canon map とおくと

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\xi^* \cdot i"] \arrow[dr, "\{\alpha.\}"'] & \circlearrowleft & \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R), E\right) \arrow[dl, "\{\varepsilon.^*\}"] \\
& \left\{\mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^\ell), E)\right\} &
\end{tikzcd}
.
$$

$$\therefore \varprojlim_{\ell} \mathrm{Ext}^d_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C\right) \cong \varprojlim_{\ell} \mathrm{Hom}_R\left(R/(\underline{f}^\ell), E\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\underline{f}}(R), E\right) = \mathrm{K}_R. \qquad \square$$

Lemma 2.1.15. $C \cong \varinjlim_{\ell} \mathrm{Ext}^d_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C\right)$.

Proof. $C_i^\ell = C/(f_1^\ell, \cdots, f_i^\ell)C$ とおく．すると

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_i^\ell \arrow[r, "\widehat{f_{i+1}^\ell}"] \arrow[d, "\widehat{f_1 \cdots f_i}"'] & C_i^\ell \arrow[r] \arrow[d, "f_1 \widehat{\cdots f_i} f_{i+1}"'] & C_{i+1}^\ell \arrow[r] \arrow[d, "f_1 \widehat{\cdots f_{i+1}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_i^{\ell+1} \arrow[r, "\widehat{f_{i+1}{}^{\ell+1}}"] & C_i^\ell \arrow[r] & C_{i+1}^{\ell+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

をみて

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^j_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C_i^\ell\right) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{f_1 \cdots f_i}"'] & \mathrm{Ext}^j_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C_{i+1}^\ell\right) \arrow[r] \arrow[d, "f_1 \widehat{\cdots f_i} f_{i+1}"'] & \mathrm{Ext}^{j+1}_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C_i^\ell\right) \arrow[r] \arrow[d, "f_1 \widehat{\cdots f_{i+1}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^j_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C_i^{\ell+1}\right) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^j_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C_{i+1}^{\ell+1}\right) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{j+1}_R\left(R/(\underline{f}^\ell), C_i^{\ell+1}\right) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

となる．よって

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^\ell), \underline{f}^\ell C) & \xrightarrow{\sim} & \cdots & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^i_R(R/(\underline{f}^\ell), C_i^\ell) & \xrightarrow{\sim} & \cdots & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^d_R(R/(\underline{f}^\ell), C) \\
\downarrow \widehat{\underline{f}} & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & \downarrow \widehat{f_1 \cdots f_i} & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & \| \\
\mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^\ell), \underline{f}^{\ell+1} C) & \xrightarrow{\sim} & \cdots & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^i_R(R/(\underline{f}^\ell), C_i^{\ell+1}) & \xrightarrow{\sim} & \cdots & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^d_R(R/(\underline{f}^\ell), C)
\end{array}
$$

をとなり, これより下の可換図をうる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^d_R(R(\underline{f}^{\ell+1}),C) \arrow[r, "\widehat{\underline{f}}"] \arrow[d, equal, "\wr"'] & \mathrm{Ext}^d_R(R(\underline{f}^{\ell}),C) \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[d, equal, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_R(R(\underline{f}^{\ell}),\underline{f}^{\ell}C) \arrow[dl, "\widehat{\underline{f}}"'] \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^{\ell+1}),\underline{f}^{\ell+1}C) \arrow[r, "\widehat{\underline{f}}"] \arrow[d, equal, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^{\ell}),\underline{f}^{\ell+1}C) \arrow[r, "\widehat{\underline{f}}^{-1}"] & \mathrm{Hom}_R(R/(\underline{f}^{\ell}),\underline{f}^{\ell+1}C) \arrow[d, equal, "\wr"'] \\
C/\underline{f}^{\ell+1}C \arrow[rr, "canon"'] & & C/\underline{f}^{\ell}C
\end{tikzcd}$$

よって $\left\{\mathrm{Ext}^d_R\left(R/(\underline{f}^{\ell}),C\right)\right\}_{\ell>0} \cong \left\{C/\underline{f}^{\ell}C\right\}_{\ell>0}$ as inverse systems を得るので $\varinjlim_{\ell} \mathrm{Ext}^d_R\left(R/(\underline{f}^{\ell}),C\right) \cong \widehat{C} = C$. $\square$

よって $C = \mathrm{K}_R$ となり (3)⇒(1) が示せた. (2)⇒(3) は自明であるから (1)⇒(2) だけをいえばよい. それは次の Lemma が述べている.

Lemma 2.1.16. $^\exists\,\mathrm{K}_R.\ \Rightarrow\ ^\exists\,\mathrm{K}_{R_P} \cong R_P \otimes_R \mathrm{K}_R$ *for all* $P \in \mathrm{Spec}\,R$.

Proof. $P \in \mathrm{Spec}\,R$ をとる. そして $Q \in \mathrm{Ass}_{\widehat{R}}\,\widehat{R}/P\widehat{R}$ をとると $P = Q \cap R$, $\dim \widehat{R}_Q/P\widehat{R}_Q = 0$ であって $\dim R_P = \dim \widehat{R}_Q =: s$ をみたす. 又 $R_P \to \widehat{R}_Q$ は flat local, K_R は MCM, であるから $R_P \otimes_R \mathrm{K}_R$ は MCM R_P-module である. そして $\mathrm{K}_{\widehat{R}_Q} \cong \widehat{R}_Q \otimes_{\widehat{R}} \mathrm{K}_{\widehat{R}}$ は the canonical $\widehat{R}_Q$-module であるので, これらより $^\forall i \neq s$, $(0) = \mathrm{Ext}^i_{\widehat{R}_Q}\left(\widehat{R}_Q/P\widehat{R}_Q, \mathrm{K}_{\widehat{R}_Q}\right) \cong \widehat{R}_Q \otimes_{R_P} \mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/PR_P, R_P \otimes_R \mathrm{K}_R)$.
$\therefore \dim_{R_P/PR_P} \mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/PR_P, R_P \otimes_R \mathrm{K}_R) = 0$.
一方, $1 = \mathrm{r}_{\widehat{R}_Q}\left(\mathrm{K}_{\widehat{R}_Q}\right) = \mathrm{r}_{R_P}(R_P \otimes_R \mathrm{K}_R) \cdot \mathrm{r}\left(\widehat{R}_Q/P\widehat{R}_Q\right)$ をみて $\mathrm{r}_{R_P}(R_P \otimes_R \mathrm{K}_R) = 1$ をうる.
(3)⇒(1) により $\mathrm{K}_{R_P} = R_P \otimes_R \mathrm{K}_R$ をうる. $\square$

よって (1),(2),(3) の同値が確かめられた. $\square$

Corollary 2.1.17. $d > 0$, $x \in \mathfrak{m}$; *an* R*-regular* とせよ. $^\exists\,\mathrm{K}_R.\ \Rightarrow\ ^\exists\,\mathrm{K}_{R/xR} \cong \mathrm{K}_R/x\,\mathrm{K}_R$.

Corollary 2.1.18. $d = 0$ ならば $\mathrm{K}_R = E$.

Theorem 2.1.19. $C \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ であるとき次は同値である.

(1) C は *the canonical* R*-module* である.
(2) $^\forall M$; *a MCM* R*-module* について
  (a) $\mathrm{Hom}_R(M,C)$ は *a MCM* R*-module* である.
  (b) $\mathrm{Ext}^j_R(M,C) = (0)$ *for* $^\forall j \neq 0$.
  (c) $M \underset{canon}{\cong} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,C),C)$.
  を全てみたす.

(3) $^\forall M$; *a C-M R-module,* $r := \dim_R M$ について
  (a) $\mathrm{Ext}_R^{d-r}(M,C)$ は *an r-dim C-M R-module* である.
  (b) $\mathrm{Ext}_R^{j}(M,C) = (0)$ *for* $^\forall j \neq d-r$.
  (c) $M \underset{canon}{\cong} \mathrm{Ext}_R^{d-r}\left(\mathrm{Ext}_R^{d-r}(M,C), C\right)$.
  を全てみたす.

Proof.
(1)⇒(2) $R = \widehat{R}$ としてよい. すると (b) については $\mathrm{Ext}_R^j(M,C) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{d-j}(M), E\right)$ であることから明らかである. (a) を d についての induction で証明する. $d = 0$ のときは自明であるから $d > 0$ として $d-1$ まで正しいとせよ. $\mathrm{Ass}_R M, \mathrm{Ass}_R C \subseteq \mathrm{Ass}\, R$ より an R-regular element $x{\in}\mathfrak{m}$ は M, C-regular でもある. さらに $\mathrm{Ass}_R \mathrm{Hom}_R(M,C) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R C$ をみて x は $\mathrm{Hom}_R(M,C)$-regular でもある. $\overline{M} = M/xM$ とおくと an exact sequence; $0 \to M \xrightarrow{\widehat{x}} M \to \overline{M} \to 0$ より

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_R\left(\overline{M}, C\right) & \to \mathrm{Hom}_R(M,C) \xrightarrow{\widehat{x}} \mathrm{Hom}_R(M,C) \to \mathrm{Ext}_R^1\left(\overline{M}, C\right) \to 0 \quad \textit{exact.} \\
& \| & \\
& \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^d(\overline{M}), E\right) & \\
& \| & \\
& (0) &
\end{array}
$$

$\therefore \mathrm{Ext}_R^1\left(\overline{M}, C\right) \cong \mathrm{Hom}_R(M,C)/x\,\mathrm{Hom}_R(M,C)$. このとき

$$\mathrm{Ext}_R^1\left(\overline{M}, C\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\overline{M}, C/xC\right) \cong \mathrm{Hom}_{R/xR}\left(M/xM, C/xC\right) \quad MCM\ R/xR-module$$

であるから $\mathrm{Hom}_R(M,C)/x\,\mathrm{Hom}_R(M,C)$ は a $(d-1)$-dim C-M R-module. $\therefore \mathrm{Hom}_R(M,C)$ は a MCM R-module.
これから (c) を示す. $^\forall M$; a MCM R-module に対して $M^* := \mathrm{Hom}_R(M,C)$ とかく. すると

$$R^{**} = \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R(R,C), C\right) \cong \mathrm{Hom}_R(C,C) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^d(C), E\right) \cong R$$

をうるので $^\forall \ell > 0$, $\left(R^\ell\right)^{**} \cong R^\ell$ である. よって M, N を MCM R-modules, $\alpha : M \to N$ an R-linear をとり

$$
\begin{array}{ccccccc}
R^{m'} & \longrightarrow & R^m & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \\
R^{n'} & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

をとると

$$
\begin{tikzcd}
& (R^{m'})^{**} \arrow[rr] \arrow[dd] & & (R^m)^{**} \arrow[rr] \arrow[dd] & & M^{**} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
R^{m'} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & R^m \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & M \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & \\
& (R^{n'})^{**} \arrow[rr] & & (R^n)^{**} \arrow[rr] & & N^{**} \arrow[rr] & & 0 \\
R^{n'} \arrow[ur] \arrow[rr] & & R^n \arrow[ur] \arrow[rr] & & N \arrow[ur] \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

をうる．これを見て $M \cong M^{**}$ canon をうる．
(2)⇒(3) M を a C-M R-module とし $s = \dim_R M$ とおく．まず (b) を s についての induction で証明しよう．これは $^\forall i < d - s$ については $\mathrm{Ext}^i_R(M, C) = (0)$ は既に示してある．よって $^\forall i > d - s$ についてのみを示せば十分．もし $\mathrm{hd}_R M < \infty$ であれば $\mathrm{hd}_R M + \mathrm{depth}_R M = \mathrm{depth}\, R$ より $\mathrm{hd}_R M = d - s$ をうるので明らか. $\mathrm{hd}_R M = \infty$ としよう．今

$$\cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0 \quad a\ free\ resolution\ of\ M$$

をとり, これを

$$
\begin{cases}
0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow U_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow U_1 \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad\quad \vdots \\
0 \longrightarrow U_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow U_i \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad\quad \vdots
\end{cases}
$$

と short exact sequences に分解する．このとき depth Lemma により $\mathrm{depth}_R U_1 \geq s+1$, $\mathrm{depth}_R U_2 \geq s+2$, $\cdots$,$\mathrm{depth}_R U_i = d$ for $^\forall i \geq d - s$. $\therefore {}^\forall j > d - s$, $\mathrm{Ext}^j_R(M, C) = \mathrm{Ext}^{j-(d-s)}_R(U_{d-s}, C) = (0)$.
(a) を s についての induction で示す．$s = d$ ならば自明. よって $s < d$ として $s + 1$ 以上で正しいとする．$^\forall i < d-s$ については $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = (0)$ であるから $^\exists x_1, \cdots, x_{d-s-1} \in (0) \underset{R}{:} M$ s,t R-regular sequence. 今 exact; $F = R^\ell \to M \to$ をとると $F/(\underline{x})F \to M \to 0$ は exact である．$N = F/(\underline{x})F$ とおくと N は $(s + 1)$-dim C-M R-module である．$U = \mathrm{Ker}(N \to M)$ とおくと $0 \to U \to N \to M \to 0$ は exact であって U は $(s + 1)$-dim C-M R-module である．よって

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d-s-1}_R(N, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d-s-1}_R(U, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d-s}_R(M, C) \longrightarrow 0 \quad exact$$

をうる．induction の仮定より $\mathrm{Ext}^{d-s-1}_R(N, C), \mathrm{Ext}^{d-s-1}_R(U, C)$ は $(s + 1)$-dim C-M R-module である. local cohomology を見て $\mathrm{depth}_R \mathrm{Ext}^{d-s}_R(M, C) \geq s$, $\dim_R \mathrm{Ext}^{d-s}_R(M, C) \leq s + 1$ である．

もし $\dim_R \operatorname{Ext}_R^{d-s}(M,C) = s+1$ であれば $^\exists P \in \operatorname{Supp}_R \operatorname{Ext}_R^{d-s}(M,C)$ s,t $\dim R/P = s+1$. しかし $\dim_R M = s$ より $P \notin \operatorname{Supp}_R M$ であるから $R_P \otimes_R \operatorname{Ext}_R^{d-s}(M,C) \cong \operatorname{Ext}_{R_P}^{d-s}(M_P, C_P) = (0)$ となり矛盾. よって $\operatorname{Ext}_R^{d-s}(M,C)$ は s-dim C-M R-module である.

Lemma 2.1.20.
M_1, M_2 を s-dim C-M R-modules とし $I_i = (0) \underset{R}{:} M_i$ $(i=1,2)$ とすれば $^\exists x_1, \cdots, x_{d-s} \in I_1 \cap I_2$ s,t an R-regular sequence.

Proof. $d-s$ についての induction で示す. $d-s=0$ ならば自明. $d-s=1$ とせよ. $\operatorname{Ext}_R^j(M_1,R) = (0)$ $^\forall j < d-s = 1$ より $\operatorname{Hom}_R(M_1,R) = (0)$. $\therefore \operatorname{V}(I_1) \cap \operatorname{Ass} R = \emptyset$. 同様にして $\operatorname{V}(I_2) \cap \operatorname{Ass} R = \emptyset$.
$\therefore I_1 \cap I_2 \not\subseteq \bigcup_{Q \in \operatorname{Ass} R} Q$. $\therefore {}^\exists x_1 \in I_1 \cap I_2$ s,t x_1 は an R-regular element.
$d-s > 1$ として $d-s-1$ までで正しいとせよ. $^\exists x \in I_1 \cap I_2$ s,t an R-regular より M_1, M_2 は a C-M R/xR-modules, $\dim_{R/xR} M_i = s$ である. $\therefore {}^\exists y_1, \cdots, y_{d-s-1} \in I_1 \cap I_2$ s,t an R-regular sequence. $\therefore$ $x, y_1, \cdots, y_{d-s-1} \in I_1 \cap I_2$ は an R-regular sequence をなす. □

(c) を s についての induction で示す. $M^* = \operatorname{Ext}_R^{d-s}(M,C)$ とかく. $s=d$ ならば自明. よって $s<d$ として $s+1$ 以上で正しいとする. M, N を s-dim C-M R-modules, $\alpha : M \to N$ an R-linear map とする. ここで上の Lemma に従い $x_1, \cdots, x_{d-s-1} \in \Big((0) \underset{R}{:} M\Big) \cap \Big((0) \underset{R}{:} N\Big)$ を an R-regular sequence になるようにとると

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & L' \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$
$$where\ U, L, U', L' \text{は}\ (s+1)-dim\ C-M\ R-modules,$$

をうるのであとは

$$\begin{tikzcd}
& U^{**} \arrow[rr] \arrow[dd] & & L^{**} \arrow[rr] \arrow[dd] & & M^{**} \arrow[rr] \arrow[d, dash] & & 0 \\
U \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & L \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & M \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \arrow[d] & & \\
& (U')^{**} \arrow[rr] & & (L')^{**} \arrow[rr] & & N^{**} \arrow[rr] & & 0 \\
U' \arrow[ur] \arrow[rr] & & L' \arrow[ur] \arrow[rr] & & N \arrow[ur] \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

をみればよい.
(3)⇒(1) $k = R/\mathfrak{m}$ とおく. $\operatorname{Ext}_R^j(k,C) = (0)$ $^\forall j \neq d$ である. そして $\operatorname{Ext}_R^d(k,C) = k^\ell$ $(\ell > 0)$ とかくと $k \cong \operatorname{Ext}_R^d\Big(\operatorname{Ext}_R^d(k,C), C\Big) = k^{\ell^2}$ より $\ell = 1$. $\therefore \mu^j(\mathfrak{m}, C) = \delta_{j,d}$. □

Lemma 2.1.21. $(0) \neq C \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ について次は同値である.

(1) C は *the canonical R-module* である.
(2) C は *a MCM R-module* であって $\mathrm{Ann}_R C = (0)$, $\mathrm{r}_R(C) = 1$ をみたす.

Proof. (1)⇒(2) は $R \cong \mathrm{Hom}_R(C, C)$ であることからほとんど自明.
(2)⇒(1) $R = \widehat{R}$ としてよい. $0 \to C \to I^{\cdot}$ を C の min injective resolution とすれば $E \lessdot\!\!\oplus I^d$.
$\therefore \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(C) \underset{ess}{\subseteq} E$. よって exact; $0 \to \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(C) \to E \to X \to 0$ について

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, E) \longrightarrow R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(C), E\right) \longrightarrow 0 \quad \textit{exact}$$

$\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(C), E\right) = \mathrm{Hom}_R\left(C, \mathrm{K}_R\right)$ となり $C^* = \mathrm{Hom}_R\left(C, \mathrm{K}_R\right)$ とおく. すると

$$\mathrm{Hom}_R(X, E) \subseteq \mathrm{Ann}_R C^* \subseteq \mathrm{Ann}_R C^{**} = \mathrm{Ann}_R C = (0)$$

より $C = C^{**} = R^* = \mathrm{K}_R$ をうる. □

これからも, しばらくは $(R, \mathfrak{m})$ は a C-M ring, $d = \dim R$ とする. そして $k = R/\mathfrak{m}$ とする.

Lemma 2.1.22. ${}^{\exists}\mathrm{K}_R$ であれば次は同値である.

(1) K_R は *an R-fractional ideal* である.
(2) K_R は *an R-fractional ideal,* $\mathrm{K}_R \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ である.
(3) R_P は *a Gorenstein local ring* である, *for* ${}^{\forall}P \in \mathrm{Min}\, R$.

但し, $\mathcal{S} = \{s \in R | s \text{ は } R - nzd \text{ である }\}$ とする.

Proof. $K = \mathbb{Q}(R)$ とおく. (1)⇒(3) $\dim R_P = 0$ より $\mathrm{K}_{R_P} = \mathrm{E}_{R_P}$ である. K_R が an R-fractional であれば K_{R_P} は an R_P-fractional であるが $\mathrm{Ass}\, R_P = \{PR_P\}$ であるために $\mathbb{Q}(R_P) = R_P$ である. よって $\mathrm{K}_{R_P} = \mathrm{E}_{R_P} \subseteq R_P$ とみてよい. R_P は local ring なので直既約であるから $R_P = \mathrm{E}_{R_P}$. $\therefore R_P$ は a Gorenstein local ring である.
(1)⇒(2) ${}^{\exists}s \in \mathcal{S}$ s,t $s\,\mathrm{K}_R \subseteq R$. よって $\mathrm{K}_R \subseteq R$ としてよい. もし $\mathrm{K}_R \cap \mathcal{S} = \emptyset$ ならば $\mathrm{K}_R \subseteq Q$ for some $Q \in \mathrm{Ass}\, R = \mathrm{Min}\, R$. $\therefore \mathrm{K}_{R_Q} \subseteq QR_Q \neq R_Q$.(矛盾)
(3)⇒(1) ${}^{\forall}P \in \mathrm{Min}\, R$ をとる. $\mathrm{Ass}_R \mathrm{E}_R(R/P) = \{P\}$ であるから ${}^{\forall}s \in R \backslash P$ は $\mathrm{E}_R(R/P)$ に同型に作用する. $\therefore \mathrm{E}_R(R/P) = \mathrm{E}_{R_P}(R_P/PR_P) = R_P$. $\therefore \mathrm{K}_R \subseteq \bigoplus_{Q \in \mathrm{Min}\, R} \mathrm{E}_R(R/Q) = \bigoplus_{Q \in \mathrm{Min}\, R} R_Q = K$. $\mathrm{K}_R \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ であるから K_R は an R-fractional. □

Lemma 2.1.23. 次は同値である.

(1) R は *a Gorenstein local ring* である.
(2) $\mathrm{Ext}^1_R(M, R) = (0)$, *for* ${}^{\forall}M$; *a MCM R-module.*

Proof. (2)⇒(1) だけで十分. $R = \widehat{R}$ としてよい. そして a MCM R-module M をとる. $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ とする. もし $\mathrm{hd}_R M < \infty$ であるならば $\mathrm{hd}_R M = 0$ より M は free である. $\therefore \mathrm{Ext}^i_R(M, R) = (0)$ for

$^\forall i>0$, M^* は a MCM R-module.
$\mathrm{hd}_R M=\infty$ とする．このときは $F_. \to M \to 0$ を a min free resolution として

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow U_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow U_1 \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ 0 \longrightarrow U_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow U_i \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

と short exact sequences に分解すると U_i は全て MCM R-module であるから $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=\mathrm{Ext}^1_R(U_{i-1},R) = (0)$ ($^\forall i\geq 2$) をうる．一方で，$0\to M^*\to F^*$. をとり，これを short exact sequences に分解し左から depth Lemma を用いると M^* が a MCM R-module であることが求まる．

$R\cong R^{**}$ であるから $^\forall X\in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ に対して $X \underset{canon}{\cong} \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R(X,R),R\right)$ をうる．
よってこれらから $R=\mathrm{K}_R$ であるから $\mathrm{r}(R)=1$. □

Corollary 2.1.24. *$d\geq 2$ ならば次は同値である.*

(1) *R は a Gorenstein local ring である.*
(2) *次の 2 条件をみたす,*
  (*a*) *$\mathrm{Hom}_R(M,R)$ は a MCM R-module である for $^\forall M$; a MCM R-module.*
  (*b*) *R_P は a Gorenstein local ring である, for $P\in \mathrm{Spec}\,R$, $\dim R_P=2$.*

Proof. (2)⇒(1) だけで十分．R は a Gorenstein local ring でないとすると $^\exists M$; a MCM R-module s,t $\mathrm{Ext}^1_R(M,R)\neq(0)$. この M に対して exact; $0\to N\to F\to M\to 0$ where F は f,g free をとると，N は a MCM R-module であって次のような exact が存在する．

$$0\to \mathrm{Hom}_R(M,R)\to \mathrm{Hom}_R(F,R)\to \mathrm{Hom}_R(N,R)\to \mathrm{Ext}^1_R(M,R)\to 0.$$

このとき $\mathrm{depth}_R \mathrm{Hom}_R(M,R)=\mathrm{depth}_R\mathrm{Hom}_R(F,R)=\mathrm{depth}_R\mathrm{Hom}_R(N,R)=d$ であるから depth Lemma は $\mathrm{depth}_R\mathrm{Ext}^1_R(M,R)\geq d-2$ を保証する．$\therefore \dim_R \mathrm{Ext}^1_R(M,R)\geq d-2$. $\therefore {}^\exists P\in \mathrm{Supp}\,\mathrm{Ext}^1_R(M,R)$ s,t $\dim R_P=2$. このとき R_P は 2-dim Gorenstein local ring, M_P は a MCM R-module であるから

$$(0)\neq R_P\otimes_R \mathrm{Ext}^1_R(M,R)\cong \mathrm{Ext}^1_{R_P}(M_P,R_P)=\mathrm{Ext}^1_{R_P}(M_P,\mathrm{K}_{R_P})\cong \mathrm{Hom}_{R_P}\left(\mathrm{H}^1_{PR_P}(M_P),\mathrm{E}_{R_P}\right)=(0)$$

となり矛盾である． □

Theorem 2.1.25. *$^\exists\mathrm{K}_R$ であれば $^\forall M$ a C-M R-module, $r=\dim_R M$ について*

$$\mu_R(M)=\mathrm{r}_R\left(\mathrm{Ext}^{d-r}_R(M,\mathrm{K}_R)\right),\quad \mathrm{r}_R(M)=\mu_R\left(\mathrm{Ext}^{d-r}_R(M,\mathrm{K}_R)\right),$$

である.

Proof. $\mu_R(M)=\mathrm{r}_R\left(\mathrm{Ext}^{d-r}_R(M,\mathrm{K}_R)\right)$ を認めると

$$\mathrm{r}_R(M)=\mathrm{r}_R\left(\mathrm{Ext}^{d-r}_R\left(\mathrm{Ext}^{d-r}_R(M,\mathrm{K}_R),\mathrm{K}_R\right)\right)=\mu_R\left(\mathrm{Ext}^{d-r}_R(M,\mathrm{K}_R)\right)$$

をうる．よって $\mu_R(M) = \mathrm{r}_R\left(\mathrm{Ext}_R^{d-r}(M, \mathrm{K}_R)\right)$ を d についての induction で証明する．$d=0$ ならば

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)\right) &= \mathrm{r}_R\left(\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M), E\right)\right) = \dim_k \mathrm{Hom}_R\left(k, \mathrm{Hom}_R(M, E)\right) \\
&= \dim_k \mathrm{Hom}_R(M/\mathfrak{m}M, E) \\
&= \ell_R(M/\mathfrak{m}M) = \mu_R(M)
\end{aligned}$$

である．$d>0$ として $d-1$ 以下まで正しいとする．$r = \dim_R M$ とおく．
$d=r$ ならば $\mathrm{r}_R\left(\mathrm{Ext}_R^{d-r}(M, \mathrm{K}_R)\right) = \mathrm{r}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)\right)$ であるから $x \in \mathfrak{m}$ を an R-regular にとると an M-regular でもあって，今 $\overline{R} = R/xR$, $\overline{M} = M/xM$, $\overline{\mathrm{K}_R} = \mathrm{K}_R / x\,\mathrm{K}_R$ とそれぞれおくと $\overline{\mathrm{K}_R} = \mathrm{K}_{\overline{R}}$ である．このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)\right) &= \mathrm{r}_R\left(\frac{\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)}{x\,\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)}\right) \\
&= \mathrm{r}_{\overline{R}}\left(\mathrm{Hom}_{\overline{R}}\left(\overline{M}, \overline{\mathrm{K}_R}\right)\right) \\
&= \mathrm{r}_{\overline{R}}\left(\mathrm{Hom}_{\overline{R}}\left(\overline{M}, \mathrm{K}_{\overline{R}}\right)\right) \\
&= \mu_{\overline{R}}\left(\overline{M}\right) \\
&= \mu_R(M)
\end{aligned}$$

である．$s<d$ として $s+1$ 以上まで正しいとすると $x_1, \cdots, x_{d-s} \in (0) \underset{R}{:} M$ を a K_R-regular sequence をなすようにとれば後は induction による． $\square$

Corollary 2.1.26. $^\exists\,\mathrm{K}_R$. $\Rightarrow$ $\mu_R(\mathrm{K}_R) = \mathrm{r}(R)$.

Corollary 2.1.27. $d \geq 1$, $^\exists\,\mathrm{K}_R \subseteq R$ とする．$\mathrm{K}_R \neq R$. $\Rightarrow$ R/K_R は *a $(d-1)$-dim Gorenstein local ring* である．

Proof. ここでは $I = \mathrm{K}_R$ とかく．すると exact; $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ をみて $\mathrm{depth}_R\, I \geq d-1$ をうる．もし，$\dim R/I = d$ ならば $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(I) \neq (0)$ であるから $(0) \neq \mathrm{Hom}_R(R/I, I) = (0) \underset{I}{:} I \subseteq (0) \underset{R}{:} \mathrm{K}_R = (0)$ を見て矛盾．よって R/I は a $(d-1)$-dim C-M ring である．そして

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_R, \mathrm{K}_R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R/I, I) \longrightarrow 0 \quad \textit{exact}$$

をみて $\mathrm{r}(R/I) = \mu\left(\mathrm{Ext}^1_R(R/I, I)\right) = 1$ をうるので R/I は a Gorenstein local ring である． $\square$

次に述べる定理も重要なものであるが，その証明は Lemma 3.21 を見ればほとんど明らかである．

Theorem 2.1.28. $(R, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (S, \mathfrak{n})$ を *a flat local homomorphism of C-M local rings* とし $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とする．このとき次の条件は同値である．

(1) $^\exists\,\mathrm{K}_S \cong S \otimes_R M$.
(2) $S/\mathfrak{m}S$ は *a Gorenstein local ring,* $M = \mathrm{K}_R$.

Corollary 2.1.29. $(R, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (S, \mathfrak{n})$ を *a flat local homomorphism of C-M rings* とする．$^\exists\,\mathrm{K}_R$. $\Rightarrow$ $S/\mathfrak{m}S$ は *a Gorenstein local ring* である．

ここで $(A, \mathfrak{m})$ を a Noetherian local ring, $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とする．今 $r = \mu_R(M)$ とすると, $^\exists$exact; $R^{(r)} \to M \to 0$ であるから $^\forall P \in \operatorname{Supp}_R M$ をとると $R_P{}^{(r)} \to M_P \to 0$ は exact である．従って, $\mu_{R_P}(M_P) \leq \mu_R(M)$ for $^\forall P \in \operatorname{Supp}_R M$ であることが確かめられる．よって

Theorem 2.1.30. *M を an s-dim C-M R-module とせよ．$^\forall P \in \operatorname{Supp}_R M$ に対して $\mathrm{r}(M_P) \leq \mathrm{r}(M)$ をみたす．*

Proof. $^\forall Q \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{R}/P\widehat{R}$ をとる．$\mathrm{r}\left(\widehat{M}_Q\right) = \mathrm{r}(M_P)\,\mathrm{r}\left(\widehat{R}_Q/P\widehat{R}_Q\right)$ であるから $\mathrm{r}(M_P) \leq \mathrm{r}\left(\widehat{M}_Q\right)$ である．よって $R = \widehat{R}$ として $\mathrm{r}(M_Q) \leq \mathrm{r}(M)$ を証明すれば十分である．

$$
\begin{aligned}
s &= \dim M_Q + \dim R/Q \\
d &= \dim R_Q + \dim R/Q
\end{aligned}
$$

であるから $\dim R_Q - \dim M_Q = d - s$ をうる．

$$
\therefore \quad \mathrm{r}(M_Q) = \mu\left(\operatorname{Ext}_R^{d-s}\left(M_Q, \mathrm{K}_{R_Q}\right)\right) = \mu\left(R_Q \otimes_R \operatorname{Ext}_R^{d-s}(M, \mathrm{K}_R)\right) \leq \mu\left(\operatorname{Ext}_R^{d-s}(M, \mathrm{K}_R)\right) = \mathrm{r}(M).
$$

□