目 次

第1章　ホモロジー代数

1.1 Projective modules

以下 簡単のためと使うさいの目的のために, $R\ni 1$; a commutative ring $R\neq(0)$ とする. $F\in R-\mathrm{mod}$ とせよ. そして $I\neq\emptyset$ a set とし F の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ について

$$x_i=0 \quad \mathit{for\ almost\ all}\ i\in I$$

であるとは $\#\{i\in I \mid x_i\neq 0\}<\infty$ であることをいう. このとき $\emptyset\neq{}^{\exists}J\subseteq I$ a finite subset of I s,t $i\in I$ について もし $i\notin J$ なら $x_i=0$ であるから

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in J}x_i$$

と定める. もちろん右辺は J の取り方によらない.

Definition 1. *$I\neq\emptyset$, a set* に対して

$$R^{(I)}=\left\{(a_i)_{i\in I}\,\middle|\,\begin{array}{l}a_i\in R\ ({}^{\forall}i\in I)\\ a_i=0\ \mathit{for\ almost\ all}\ i\in I\end{array}\right\}$$

とおく. $R^{(I)}$ は 自然に $R^{(I)}\in R-\mathrm{mod}$ となる.

$F\in R-\mathrm{mod}$ と $\{x_i\}_{i\in I}$ where $x_i\in F$ $({}^{\forall}i\in I)$ を与えると

$${}^{\exists 1}\varphi:R^{(I)}\to F\ \mathit{an}\ R-\mathit{linear\ map}\ s,t\ {}^{\forall}i\in I,\ \varphi(e_i)=x_i\ \mathit{where}\ e_i=(\cdots 0,\underset{i}{1},\cdots)\in R^{(I)}$$

Proof. ${}^{\forall}a\in R^{(I)}$ をとると, $a=(a_i)_{i\in I}$ と表せ $a_i=0$ for almost all $i\in I$ であるから

$$\varphi(a)=\sum_{i\in I}a_ix_i\in F$$

が意味をもつ. この φ は R-linear で $\varphi(e_i)=x_i$ $({}^{\forall}i\in I)$ となることは自明である. 又 $a=\sum_{i\in I}a_ix_i$ であるから ${}^{\exists 1}\varphi$ である. □

Definition 2. *$F\in R-\mathrm{mod}$* について F が *free* であるとは

(1) $F=(0)$ か又は,
(2) *$\emptyset\neq{}^{\exists}I$; a set s,t $R^{(I)}\cong F$ as R-modules.*

のいずれかを F が満たしていることと定める.

Lemma 1.1.1. $(0)\neq F\in R-\mathrm{mod}$ のとき *TFAE*;

(1) F は *free* である.
(2) ${}^{\exists}\{x_i\}_{i\in I}$ *where* $I\neq\emptyset$; *a set*, $x_i\in F$ $({}^{\forall}i\in I)$ であって, ${}^{\forall}x\in F$, $x=\sum_{i\in I}a_ix_i$ となるような ${}^{\exists 1}\{a_i\}_{i\in I}$ *where* $a_i\in R$ $({}^{\forall}i\in I)$ であって $a_i=0$ *for almost all* $i\in I$.

Proof. (1)⇒(2) $\emptyset\neq{}^{\exists}I$; a set s,t $\varphi: R^{(I)}\to F$; an R-isomorphism. よって $x_i=\varphi(e_i)$ とする.
(2)⇒(1) $e_i\mapsto x_i$ for all $i\in I$ で $R^{(I)}\cong F$ をうる. □

Definition 3. $F\in R-\mathrm{mod}$ で $L\subseteq F$ *an* R*-submodule of* F のとき

$$L\lhd\!\!\!\!\oplus F.\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ {}^{\exists}X\subseteq F\ an\ R-submodule\ of\ F\ s,t\ F=L\oplus X.$$

Definition 4. $F,L\in R-\mathrm{mod}$ のとき

$$L\lhd\!\!\!\!\oplus F.\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ {}^{\exists}\alpha: L\to F,\ and\ {}^{\exists}\beta: F\to L\ R-linears\ s,t\ \beta\cdot\alpha=1_L.$$

$$\bigl(i,e\ {}^{\exists}L',X\subseteq F;\ R-submodules\ of\ F\ s,t\ L\cong L'\ and\ F=L'\oplus X.\bigr)$$

Definition 5. $Q\in R-\mathrm{mod}$ について Q が *projective* であるとは

$$Q\lhd\!\!\!\!\oplus F\ for\ some\ free\ F\in R-\mathrm{mod}.$$

よって, free ならば projective である.

Theorem 1.1.2. $Q\in R-\mathrm{mod}$ のとき *TFAE*;

(1) Q は *projective* である.
(2) $\mathrm{Hom}_R(Q,*)$ は *exact* である.

そして (2) は自明に次の条件と同値である.

$(2)'$
$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
であれば,
$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "{}^{\exists}g"'] \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
$s,t\ f=\alpha\cdot g.$

Proof. (2)⇐(1)　$I=Q$, $F=R^{(I)}$ として ${}^{\exists 1}\varphi: R^{(I)}\to Q$ an R-linear map s,t $\varphi(e_q)=q$ for all $q\in Q$. この φ は全射であるから

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "1_Q"'] & \\ F \arrow[r, "\varphi"] & Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}\qquad exact$$

となり仮定より ${}^{\exists}f: Q\to F\ R-linear\ map\ s,t\ 1_Q=\varphi\cdot f$. $L=f(Q)$ とすると $L\subseteq F$ an R-submodule of F であって $F=L\oplus\mathrm{Ker}\,\varphi$. 実際に ${}^{\forall}x\in F$ をとると $\varphi(x)=\varphi(f(\varphi(x)))$ より $x-(f\cdot\varphi)(x)\in\mathrm{Ker}\,\varphi$. $\therefore F=L+\mathrm{Ker}\,\varphi$ となり, ここで更に $L\cap\mathrm{Ker}\,\varphi\ni{}^{\forall}\ell$ については $\ell=f(q)$ $(q\in Q)$ とかくと $0=\varphi(\ell)=(\varphi f)(q)=q$.

$\therefore\ q=0.$ $\therefore \ell=0.$ よって $F=L\oplus\mathrm{Ker}\,\varphi$ をうる. もちろん φ は単射であるから $Q\cong L$. $\therefore Q$ は projective である.

(2)$\Rightarrow$(1) $^{\forall}exact;$ $0\to X\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z\to 0$ に対して $0{\to}X^*{\to}Y^*{\to}Z^*\to 0$ が exact をいうのみ. もちろん $Y^*{\to}Z^*\to 0$ が exact をいう. つまり

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "f"'] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & Z \arrow[r] & 0 \quad exact \end{tikzcd}$$

に対して $^{\exists}g:Q{\to}Y$ an R-linear map s,t $f=\beta{\cdot}g$ を示せばよい. $Q{\neq}(0)$ としてよい. 今, $^{\exists}Q'{\subseteq}F$ an R-submodule of F s,t $\psi:Q\xrightarrow{\sim}Q'$ and $Q'{\lhd\!\!\!\oplus}F$. $F{\neq}(0)$ より $\varphi:F\xrightarrow{\sim}R^{(I)}$ for some a set $I{\neq}\emptyset$. $F=Q'\oplus X$ となる $X{\subseteq}F$ an R-submodule of F を取り $Y=\varphi(X)$ とすると, $R^{(I)}=\varphi(Q')\oplus Y$ であって $Q\xrightarrow{\sim}\varphi(Q')$. つまり 一般性を失うことなく

$$\varphi:Q\xrightarrow{\sim}Q'{\lhd\!\!\!\oplus}F=R^{(I)}=Q'\oplus X$$

としてよい. すると $^{\forall}x{\in}F$ に対して $^{\exists 1}(y{\in}Q',\ z{\in}X)$ s,t $x=y+z$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\beta"] & Z & \\ & Q \arrow[u, "f"] & F \arrow[l, "p"'] \\ & \cup & \cup \\ & \psi^{-1}(y) & x \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$^{\forall}i{\in}I$, $^{\exists}y_i{\in}Y$ s,t $(f{\cdot}p)(e_i)=\beta(y_i)$. このとき $(\beta{\cdot}p)(e_i)=\beta(y_i)=(f{\cdot}p)(e_i)$ for $^{\forall}i{\in}I$ より

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\beta"] & Z \\ & F \arrow[ul, "p"] \arrow[u, "f\cdot p"'] \end{tikzcd}$$

は可換である. そこで $g:Q\xrightarrow{\psi}Q'\hookrightarrow F\xrightarrow{p}Y$ とすると この g が求める写像である. □

Definition 6. $^{\forall}M{\in}R-\mathrm{mod}$ に対して

$$^{\exists}exact;\quad \cdots{\to}P_i\xrightarrow{\partial_i}P_{i-1}{\to}\cdots{\to}P_1\xrightarrow{\partial_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}M{\to}0 \quad where\ P_i=projective\ for\ ^{\forall}i.$$

このような完全列を M の *a projective resolution* と呼ぶ.

Lemma 1.1.3. $f:M{\to}N$ は *an R-linear map* で

$$\begin{array}{lcccl} \cdots{\to}P_i{\longrightarrow}P_{i-1}{\to}\cdots{\to}P_1{\longrightarrow}P_0 & \longrightarrow & M & \to & 0 \quad a\ projective\ cpx \\ & & \downarrow f & & \\ \cdots{\to}Q_i{\longrightarrow}Q_{i-1}{\to}\cdots{\to}Q_1{\longrightarrow}Q_0 & \longrightarrow & N & \to & 0 \quad a\ resolution \end{array}$$

とすると ${}^{\exists}\{f_i\}_{i\geq 0}$ *where* $f_i : P_i \to Q_i$ *an R-linear map s,t*

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] & {} \\
\arrow[r] & Q_{i+1} \arrow[r, "\partial'_{i+1}"] & Q_i \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

.

Proof. $\begin{array}{ccccc} P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & & \\ & & \downarrow f & & \\ Q_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & N & \to & 0 \end{array}$ より P_0 は projective であるから f_0 をうる.

$f_0, \cdots, f_i$ まで得られたとせよ.

$$\begin{array}{ccccc} P_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & P_i & \xrightarrow{\partial_i} & P_{i-1} \\ & & {\scriptstyle f_i}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f_{i-1}}\Big\downarrow \\ Q_{i+1} & \xrightarrow{\partial'_{i+1}} & Q_i & \xrightarrow{\partial'_i} & Q_{i-1} \end{array}$$

すると $\mathrm{Im}(f_i \cdot \partial_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}\,\partial'_i = \mathrm{Im}\,\partial'_{i+1}$ よって

$$\begin{array}{ccccc} P_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & \mathrm{Im}\,\partial_{i+1} & & \\ & & {\scriptstyle f_i}\Big\downarrow & & \\ Q_{i+1} & \xrightarrow{\partial'_{i+1}} & \mathrm{Im}\,\partial'_{i+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

より ${}^{\exists}f_{i+1}$ をうる. □

Lemma 1.1.4. *$f : M \to N$ は an R-linear map で*

$$\begin{array}{llllll} \cdots\to P_i \xrightarrow{\partial} P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial} P_0 & \longrightarrow & M & \to & 0 & \textit{a projective cpx} \\ & & \downarrow f & & & \\ \cdots\to Q_i \xrightarrow{\partial} Q_{i-1} \to \cdots \to Q_1 \xrightarrow{\partial} Q_0 & \longrightarrow & N & \to & 0 & \textit{a resolution} \end{array}$$

とし, $\{g_i\}$, $\{h_i\}$ はそれぞれ f を *lift* をしていると仮定せよ.
このとき ${}^{\exists}s_i : P_i \to Q_{i+1}$ *R-linear maps s,t* $s_{i-1}\partial + \partial s_i = g_i - f_i$ *for all i.*

$$\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[d, "g_i - f_i"] & P_{i-1} \arrow[dl, "s_{i-1}"] \\
Q_{i+1} \arrow[r, "\partial"] & Q_i &
\end{tikzcd}$$

.

ただし, $P_i = (0)$, $Q_i = (0)$ *for* ${}^{\forall}i < 0$ とする.

Proof. $f_i = g_i - h_i$ とおく.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, "{}^{\exists}\alpha"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 & a\ cpx \\ Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 & exact \end{tikzcd} .$$

ただし $s_{-1} = 0$, $s_0 = \alpha$ と定める. よって s_{-1}, $s_0, \cdots, s_i$ まで取れたとしてよい. このとき

$$\begin{tikzcd} & P_{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & P_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, "s_i"'] & P_{i-1} \arrow[dl, "s_{i-1}"'] \\ Q_{i+2} \arrow[r, "\partial"] & Q_{i+1} \arrow[r, "\partial"] & Q_i \arrow[r, "\partial"] & Q_{i-1} \end{tikzcd} .$$

$$\partial\left(f_{i+1} - s_i\partial\right) = \partial f_{i+1} - \partial s_i \partial = \partial f_{i+1} - \left(f_i - s_{i-1}\partial\right)\partial = \partial f_{i+1} - f_i\partial = 0.$$

より s_{i+1} を得る. □

Definition 7. 各 $M \in R-\mathrm{mod}$ に対して

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を M の *a projective resolusion* としてこれを *1* つずつ *fix* する. すると ${}^{\forall}N \in R-\mathrm{mod}$ に対して

$$\cdots \to 0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, N) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_i, N) \to \cdots$$

という *a complex in* $R-\mathrm{mod}$ が与えられる. そこで

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, N) := \mathrm{H}^i\left(\mathrm{Hom}_R(P., N)\right) \quad {}^{\forall}i \in \mathbb{Z}$$

と定めて, これを *the* $i-th$ *extension of* N *by* M という.

Proposition 1.1.5. $\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ は *bi-functor* である.

Proof. $M \in R-\mathrm{mod}$ を fix すると, $\alpha : N \to N'$ an R-linear map が与えられていれば $P. \to M$ を用いて

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & 0 & \to & \mathrm{Hom}_R(P_0, N) & \to & \mathrm{Hom}_R(P_1, N) & \to & \cdots \\ & & & & \downarrow \alpha_* & \circlearrowleft & \downarrow \alpha_* & & \circlearrowleft \\ \cdots & \to & 0 & \to & \mathrm{Hom}_R(P_0, N') & \to & \mathrm{Hom}_R(P_1, N') & \to & \cdots \end{array}$$

よって $\alpha_* : \mathrm{Ext}^i_R(M, N) \to \mathrm{Ext}^i_R(M, N')$ が導かれ, これが functor となることは自明である.

次に $N \in R-\mathrm{mod}$ を fix する.

$$\begin{array}{ccccl} P. & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \quad a\ projective\ resolution \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \\ Q. & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \quad a\ projective\ resolution \end{array}$$

を見るに f の lifting $\{f_i\}_{i\geq 0}$ について

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_R(P_0,N) & \to & \mathrm{Hom}_R(P_1,N) & \to & \cdots & \to & \mathrm{Hom}_R(P_i,N) & \to \cdots \\
& \uparrow f_0^* & \circlearrowleft & \uparrow f_1^* & & \circlearrowleft & & \uparrow f_i^* & \\
0 \to & \mathrm{Hom}_R(Q_0,N) & \to & \mathrm{Hom}_R(Q_1,N) & \to & \cdots & \to & \mathrm{Hom}_R(Q_i,N) & \to \cdots
\end{array}$$

よって $\alpha^* : \mathrm{Ext}_R^i(M',N) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,N)$ を得る．この α^* は $\{f_i\}_{i\geq 0}$ の取り方によらず, 直ちに functor であることがわかる.

あとは, $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ を与えたときに, ${}^\forall i\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_R^i(M,N) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{Ext}_R^i(M',N) \\
\mathrm{Ext}_R^i(M',N) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g_*"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ext}_R^i(M',N') \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

を確かめればよい. □

1.2 Long exact sequences

$M\in R-\mathrm{mod}$, $0 \to X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z \to 0$ exact in $R-\mathrm{mod}$ とする．そして

$$\cdots \to P_i \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

を M の固定しておいた a projective resolution とすれば

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & & 0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_i,X) \arrow[r, "\partial_{i+1}^*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1},X) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \cdots & & C_i'/B_i' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{i+1}' \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_i,Y) \arrow[r, "\partial_{i+1}^*"] \arrow[d, "\beta_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1},Y) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"'] & \cdots & \Rightarrow & C_i/B_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{i+1} \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_i,Z) \arrow[r, "\partial_{i+1}^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1},Z) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & & C_i''/B_i'' \arrow[r] \arrow[d] & Z_{i+1}'' \\
 & 0 & 0 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ {}^{\exists}$a long exact sequence;

$$\begin{aligned}\cdots \to 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,Z)\\ &\xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}^1_R(M,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,Z)\\ &\ \vdots\\ &\xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}^i_R(M,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_R(M,Z)\\ &\xrightarrow{\Delta} \cdots \quad .\end{aligned}$$

Remark 1.2.1.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_R(P_0,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1,X) \quad \textit{exact}$$

から $\mathrm{Hom}_R(M,X) \cong \mathrm{Ext}^0_R(M,X)$ を得るが, これは無理に同一視することはない.

Lemma 1.2.2.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha'"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^i_R(M,Z) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,X) \arrow[d] \\ \mathrm{Ext}^i_R(M,Z') \arrow[r, "\Delta'"] & \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,X') \end{tikzcd} \quad {}^{\forall} i \in \mathbb{Z}.$$

Proof.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] \\
 & & 0 \arrow[dd] & \\
0 \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_i, X') \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1}, X') \arrow[dd] \\
\mathrm{Hom}_R(P_i, X) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1}, X) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{Hom}_R(P_i, Y') \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1}, Y') \arrow[dd] \\
\mathrm{Hom}_R(P_i, Y) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1}, Y) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{Hom}_R(P_i, Z') \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1}, Z') \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(P_i, Z) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1}, Z) \arrow[ur] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

は全て可換である. □

$0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ は exact で P, Q は projective で

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\varepsilon}\uparrow & & & & {\scriptstyle\tau}\uparrow & & \\
 & & P & & & & Q & &
\end{array}$$

とすると $^\exists\gamma : Q \to Y$ an R-linear map s,t $\tau = \beta\gamma$. これを用いて $\rho = [\alpha\varepsilon,\ \gamma] : P\oplus Q \to Y$ を作ると

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "i"', "\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & P\oplus Q \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "p", "{[0\ \ 1]}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Q \arrow[u, "\tau"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

ρ は onto で, $0 \to \operatorname{Ker}\varepsilon \to \operatorname{Ker}\rho \to \operatorname{Ker}\tau \to 0$ は exact である. これより

$$\cdots \to P_i \to \cdots \to P_0 \to L \to 0$$

$$\cdots \to Q_i \to \cdots \to Q_0 \to N \to 0$$

をそれぞれ L, N の projective resolution とすれば

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & N \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[u] \arrow[r] & P_0\oplus Q_0 \arrow[u] \arrow[r] & Q_0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[u] \arrow[r] & P_1\oplus Q_1 \arrow[u] \arrow[r] & Q_1 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

の形の a projective resolution of Y を構成できる. $P.\oplus Q. \to M$ は, はじめに固定された projective resolution ではないけれど下に述べるように $\operatorname{Ext}^i_R(M,*)$ を定めるにはこれを用いて安全である.

Remark 1.2.3. P, Q は *projective* $\Rightarrow$ $P\oplus Q$ も *projective.*

Remark 1.2.4. $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)$ は M の *projective resolution* の取り方には, 本質的によらない.

Proof. $P. \to M$, $Q. \to M$ を M の 2 つの projective resolution とすると

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

となるが, このとき $^\forall N{\in}R-\mathrm{mod}$ に対して

$$f_i^* g_i^* : \mathrm{Ext}_R^i(M,N) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,N) \quad g_i^* f_i^* : \mathrm{Ext}_R^i(M,N) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,N)$$

はいずれも identity である. □

そこで, $^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}$ をとり

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(Q_i,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(Q_{i+1},X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(Q_i{\oplus}P_i,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(Q_{i+1}{\oplus}P_{i+1},X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_i,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_{i+1},X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

を見るに $^\exists$a long exact sequence

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^i(N,X) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,X) \to \mathrm{Ext}_R^i(L,X) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,X) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,X) \to \cdots$$

を得る.

Exercise 1. 上の Δ の *naturelity* を示せ.

1.3 Projective dimensions

Definition 8. $M{\in}R-\mathrm{mod}$ について

$$\mathrm{hd}_R\, M = \begin{cases} -\infty & M=(0) \\ \min\left\{n{\geq}0 \middle| {}^\exists exact;\quad 0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0 \quad where\ P_i = projective\right\} & M{\neq}(0) \end{cases}$$

と定めて M の *the homological dimension* という.

Lemma 1.3.1. $M{\in}R-\mathrm{mod}$ について

$$\begin{aligned} \mathrm{hd}_R\, M{\leqslant}0. \quad &\Leftrightarrow \quad M \text{ は } projective. \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \to X \to Y \to M \to 0 \quad exact \text{ は } split \text{ する}. \end{aligned}$$

Lemma 1.3.2. $M{\in}R-\mathrm{mod}$, $n{\geqslant}0$ について

$$\begin{aligned} \mathrm{hd}_R\, M{\leqslant}n. \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ext}_R^i(M,X)=(0)\ for\ {}^\forall i>n,\ {}^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}. \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,X)=(0)\ for\ {}^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}. \end{aligned}$$

もし, R が *Noetherian*, $M{\in}\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ であれば, $X{\in}\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ だけを調べればよい.

Proof. $(n=0)$ とする. $\mathrm{hd}_R M \leqslant 0$ なら M は projective. $\therefore \mathrm{Ext}^i_R(M,\ ) = (0)$ for $i>0$.
逆に, $\mathrm{Ext}^1_R(M,X) = (0)$ ならば ${}^\forall exact;\ \ 0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して

$$\mathrm{Hom}_R(M,Y) \to \mathrm{Hom}_R(M,Z) \to 0 \quad exact.$$

$\therefore M$ は projective である. よって $n=0$ で正しい. $n>0$ で $n-1$ まで正しいとする. 今

$$^\exists exact;\ \ 0 \to N \to P \to M \to 0 \quad where\ P = projective$$

をとると, ${}^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}$, ${}^\forall i{\geq}n$ について

$$\mathrm{Ext}^i_R(N,X) {\cong} \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,X).$$

$\therefore \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,X) = (0)$ ならば $\mathrm{hd}_R M {\leq} n-1$ であって $\mathrm{hd}_R M {\leq} n$ を得る. □

Corollary 1.3.3. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ が *exact* であるとき, どれか 2 つが $\mathrm{hd} < \infty$ なら残りも $\mathrm{hd} < \infty$ を満たす.

Lemma 1.3.4. $(R,\mathfrak{m})$ *local* なら, ${}^\forall f,g$ *projective* は *free* である.

Proof. $P{\neq}(0)$ として十分. $\dim_{R/\mathfrak{m}} P/\mathfrak{m}P = n > 0$ とおくと

$$^\exists x_1,\cdots,x_n{\in}P\ s,t\ P/\mathfrak{m}P = \sum_{i=1}^n R\overline{x_i}.$$

勿論 $P = \displaystyle\sum_{i=1}^n Rx_i$ である. $\therefore {}^\exists\varphi : R^n \to P$ onto. $\therefore 0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to R^n \to P \to 0$ は split するから $K = \mathrm{Ker}\,\varphi{\in}\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ よって $K/\mathfrak{m}K = (0)$. $\therefore K = (0)$. □

Remark 1.3.5. R が *Dedekind* であって, かつ *PID* でないならば, ${}^\forall I{\subseteq}R:$ *ideal* は *projective.* しかし少なくとも 1 つは *free* ではない.

Proof. $I{\neq}(0)$ として十分. $I{\cdot}I^{-1} = R$ より

$$1 = \sum_{\alpha=1}^n i_\alpha j_\alpha \quad (n>0;\ i_\alpha{\in}I,\ j_\alpha{\in}I^{-1})$$

とかく. そして $\varphi : R^n \to I$ を $(a_\alpha) \mapsto \sum a_\alpha i_\alpha$, $\psi : I \to R^n$ を $i \mapsto (ij_\alpha)$, と定めると $\varphi\psi = 1_I$ を満たすので φ は split epi である. もし I が free なら I は principle である. □

Remark 1.3.6. $R = k[X_1,\cdots,X_n]$ $(k = a\ field)$ なら, R 上の ${}^\forall projective$ は *free* である.

もし R が Noetherian であれば, ${}^\forall M{\in}\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ に対して

$$^\exists exact;\ \ \cdots \to P_i \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

よって a projective resolution of M を, P_i は全て f,g free にとることができ, このとき

Lemma 1.3.7. R が *Noetherian,* $M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ として $n\geq 0$ とする.

$$\mathrm{hd}_R\, M\leq n. \Leftrightarrow {}^{\exists}exact;\quad 0\to P_n\to\cdots\to P_0\to M\to 0\quad where\ P_i\in\underline{\underline{\mathrm{P}}}(R)\ for\ {}^{\forall}i.$$

もし R がさらに *local* ならば, P_i は全て *free* になる.

Theorem 1.3.8. $(R,\mathfrak{m})$ は *Noeth local* とすると次は同値である.

(1) $\mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m}<\infty$

(2) $\displaystyle\sup_{M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)}\mathrm{hd}_R\, M<\infty$

$\left(\text{あるいは}\ \mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m}=\displaystyle\sup_{M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)}\mathrm{hd}_R\, M\ \text{としてもよいのでは.}\right)$

Proof. (1)⇒(2) のみで十分. $n=\mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m}$ とおき ${}^{\forall}M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $\mathrm{hd}_R\, M\leq n$ を示す. もちろん $n\geq 0$, $M\neq(0)$ としてよい. $\dim_R M=0$ なら組成列をつくって $M=R/\mathfrak{m}$ の case に reduce する. $\dim_R M=d>0$ としてよいから $\overline{M}=M/\,\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ をとおして $\mathrm{depth}_R\, M>0$ として十分. よって $f\in\mathfrak{m}$ をとって

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\ f\ }M\longrightarrow M/fM\longrightarrow 0$$

をみるに ${}^{\forall}X\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ に対して

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M/fM,X)&\to&\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,X)&\xrightarrow{f}&\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,X)&\to&\mathrm{Ext}^{n+2}_R(M/fM,X)\\&&&&&&\|\\&&&&&&(0)\end{array}.$$

Nakayama's Lemma から $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,X)=(0)$ となり, $\mathrm{hd}_R\, M\leq n$ を得る. □

(注) この証明はあとになって完成するから心配しない.

1.4 Tor **functor**

$P.\to M$ を $M\in R-\mathrm{mod}$ の固定した a projective resolution として, $N\in R-\mathrm{mod}$ に対して

$$\mathcal{C}\ :\ \cdots\to P_{i+1}\otimes_R N\to P_i\otimes_R N\to\cdots\to P_0\otimes_R N\to M\otimes_R N\to 0\to\cdots$$

の homology を $\mathrm{Tor}^R_i(M,N)\,(=\mathrm{H}_i(\mathcal{C}))$ とかく. $\mathrm{Tor}^R_i(M,N)$ は functor である. 実際 $P.\xrightarrow{\varepsilon}M$, $P.'\xrightarrow{\varepsilon'}M'$ を projective resolutions, $f:M\to M'$ を an R-linear map として f を固定すると

$$\begin{tikzcd} & \cdots \arrow[r] & P_i\otimes_R N \arrow[r] \arrow[dl, "s_i\otimes_R N"'] \arrow[d] & P_{i-1}\otimes_R N \arrow[r] \arrow[dl, "s_{i-1}\otimes_R N"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & P'_{i+1}\otimes_R N \arrow[r] & P'_i\otimes_R N \arrow[r] & \cdots & \end{tikzcd}$$

をうるので $\mathrm{Tor}^R_i(M,N)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Tor}^R_i(M',N)$ を得る.

Exercise 2. この f_* が f の *lifting* の取り方によらないことを示せ. そして, N を固定して M については *functor* であることを示せ.

次に, M を固定する. $f : N \to N'$ an R-linear map に対して

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_{i+1} \otimes_R N & \longrightarrow & P_i \otimes_R N' & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_{i+1} \otimes_R N' & \longrightarrow & P_i \otimes_R N' & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

より $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Tor}_i^R(M,N')$ を得て functor となる.
$M \xrightarrow{\alpha} M'$, $N \xrightarrow{\beta} N'$ が R-linear であれば

$$\begin{tikzcd}
 & P_{i+1} \otimes_R N' \arrow[rr] \arrow[dd] & & P_i \otimes_R N' \arrow[dd] \\
P_{i+1} \otimes_R N \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & P_i \otimes_R N \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & P'_{i+1} \otimes_R N' \arrow[rr] & & P'_i \otimes_R N' \\
P'_{i+1} \otimes_R N \arrow[ur] \arrow[rr] & & P'_i \otimes_R N \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

より

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Tor}_i^R(M,N') \arrow[d] \\
\mathrm{Tor}_i^R(M',N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_i^R(M',N')
\end{tikzcd}$$

となる.

$0 \to X \to Y \to Z \to 0$ が exact であれば (projective $\Rightarrow$ flat は使ってもよいだろう,)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_i \otimes_R X & \longrightarrow & P_{i-1} \otimes_R X & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_i \otimes_R Y & \longrightarrow & P_{i-1} \otimes_R Y & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_i \otimes_R Z & \longrightarrow & P_{i-1} \otimes_R Z & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

より a long exact sequence

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Tor}_i^R(M,X) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,Y) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,Z) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Tor}_{i-1}^R(M,X) \to \cdots$$

がえられる．もちろん $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \cong M \otimes_R N$ である．$N \in R-\mathrm{mod}$ を fix すれば $0 \to L \to M \to M' \to 0$ (ex) より ${}^{\exists}$a long exact sequence;

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Tor}_i^R(L,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M',N) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Tor}_{i-1}^R(L,N) \to \cdots$$

をえる．

Exercise 3. 上の 2 つの Δ の *naturelity* を示せ．

Lemma 1.4.1. $N \in R-\mathrm{mod}$ について次は同値である．

(1) N は *flat.*
(2) $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) = (0)$, ${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$.
(3) $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = (0)$, ${}^{\forall}i \geq 1$ ${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$.

Proof. (1)⇒(3) は $\cdots \to P_i \otimes_R N \to \cdots \to P_0 \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0$ が exact による．
(2)⇒(1) $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ (ex) なら

$$\mathrm{Tor}_1^R(Z,N) \to X \otimes_R N \to Y \otimes_R N \to Z \otimes_R N \to 0 \qquad exact,$$

$\mathrm{Tor}_1^R(Z,N) = (0)$ による． □

Proposition 1.4.2. ${}^{\forall}M, N \in R-\mathrm{mod}$, ${}^{\forall}i \in \mathbb{Z}$ について

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M).$$

Proof. $i \leq 0$ で自明．$i \geq 0$ として $0 \to K \to \underset{free}{F} \to N \to 0$ *exact* とする．

$$\begin{array}{ccccccc}
0 = \mathrm{Tor}_n^R(M,F) & \to & \mathrm{Tor}_n^R(M,N) & \to & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,K) & \to & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,F) \\
 & & & & \| \wr & & \| \wr \\
0 = \mathrm{Tor}_n^R(F,M) & \to & \mathrm{Tor}_n^R(N,M) & \to & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(K,M) & \to & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(F,M)
\end{array}$$

□

$(R, \mathfrak{m})$ Noeth local とする．$M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ について

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を a minimal free resolution とすると

$$\cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を M の a free resolution (i,e $L_i \in \underline{\underline{\mathrm{P}}}(R)$) に対して

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \| & & \\
\cdots & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & \| & & . \\
\cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \| & & \\
\cdots & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

${}^{\forall} g_i f_i$ は onto (bijective) である. $\therefore f_i$ は split mon, g_i は onto. これを用いると

Lemma 1.4.3. $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ で $M \neq (0)$ のとき, $\mathrm{hd}_R\, M < \infty$ ならば

$$F_n \neq (0) \quad しかし \quad F_i = (0)\ {}^{\forall} i > n.$$

つまり $\mathrm{hd}_R\, M = \sup\left\{ i \geq 0 \mid \mathrm{Tor}_R^i(M, R/\mathfrak{m}) \neq (0) \right\}$ となる.

Proof. 上で $L_i = (0)$ (${}^{\forall} i > n$) にとれ. 但しこれがとれることは注意が必要とする. □

Corollary 1.4.4. $0 \to L \to M \to N \to 0$ *exact in* $\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とする. このとき

(1) $\mathrm{hd}_R\, L > \mathrm{hd}_R\, M \;\Rightarrow\; \mathrm{hd}_R\, N = \mathrm{hd}_R\, L + 1$.
(2) $\mathrm{hd}_R\, L = \mathrm{hd}_R\, M \;\Rightarrow\; \mathrm{hd}_R\, N \leq \mathrm{hd}_R\, L + 1$.

Proof. (1) $L \neq (0)$, $N \neq (0)$; もちろん $M \neq (0)$. $n = \mathrm{hd}_R\, M$ とおく. $n = \infty$ ならば $\mathrm{hd}_R\, N = \infty$ である. $n < \infty$ とし $m = \mathrm{hd}_R\, N$ とすと, $m < n$ より

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(N, R/\mathfrak{m}) \cong \mathrm{Tor}_n^R(L, R/\mathfrak{m}) \neq (0).$$

$${}^{\forall} i > n+1\ ; \quad \mathrm{Tor}_i^R(N, R/\mathfrak{m}) = (0).$$

$\therefore$ (1) を得る.
(2) $n = \mathrm{hd}_R\, L < \infty$ として十分. $\therefore {}^{\forall} i > n+1$, $\mathrm{Tor}_i^R(N, R/\mathfrak{m}) = (0)$. □

これを用いると, Theorem 1.3.8 を簡単に証明できる.

Proof of Theorem 1.3.8. $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とし $F \to M \to 0$ を M の a min free resolution とする. ${}^{\forall} i > \mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m} = n$, $\mathrm{Tor}_i^R(M, R/\mathfrak{m}) \cong \mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{m}, M) = (0)$. ゆえに

$$\cdots \longrightarrow F_{i+1} \otimes_R R/\mathfrak{m} \xrightarrow[0]{\partial_{i+1} \otimes_R R/\mathfrak{m}} F_i \otimes_R R/\mathfrak{m} \longrightarrow \cdots$$

より $F_i = (0)$. よって $\mathrm{hd}_R\, M \leq n$ である. □

Remark 1.4.5. ここに *min free resolution* の一般論を入れる必要あり．とくに $(R, \mathfrak{m})$ *Noeth local* のとき $^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ は *a min free resolution* を持つ．これはいかなる性質を持つかを述べること．次節を見よ．

1.5 Injecitve modules

Definition 9. $M \in R-\mathrm{mod}$ が *injective* であるとは, $\mathrm{Hom}_R(\ ,M)$ が *exact* であることをいう．これは

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dotted, "^\exists g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

と同値である．

さて $\varphi : R \to S$ を a ring homomorphism とする．$^\forall M \in R-\mathrm{mod}$ をとり $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ に次のような S-action を定義して $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ を S-module とみる．

$$s \rightharpoonup f := f \cdot \widehat{s}\ (\ i,e\ \ S \xrightarrow{\widehat{s}} S \xrightarrow{f} M\ ) \quad for\ ^\forall s \in S,\ ^\forall f \in \mathrm{Hom}_R(S, M).$$

Lemma 1.5.1. $\mathrm{Hom}_S\left(X, \mathrm{Hom}_R(S, M)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(X, M) \quad ^\forall X \in S-\mathrm{mod}.$

Lemma 1.5.2. $^\forall M \in R-\mathrm{mod}$ *injective* に対して $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ は S*-injective* である．

Proof.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"', "S-linear"] & Y \quad exact \\ & \mathrm{Hom}_R(S, M) & \end{tikzcd}$$

を与えると, $^\forall x \in X$, $f(x) : S \to M$ R-linear map. $\therefore < f(x), 1 > \in M$. $\therefore\ ^\exists \phi : X \to M$ a map s,t $x \mapsto < f(x), 1 >$. $^\forall x, y \in X$, $^\forall r \in S$,

$$\phi(x+y) =< f(x+y), 1 >=< f(x) + f(y), 1 >=< f(x), 1 > + < f(y), 1 >= \phi(x) + \phi(y).$$
$$\phi(rx) =< f(rx), 1 >=< rf(x), 1 >=< f(x), r \rightharpoonup 1 >=< f(x), r > .$$

とくに $r \in R$ であれば $\phi(rx) = \phi(\varphi(r)x) =< f(x), \varphi(r) >= r\phi(x)$. $\therefore \phi$ は R-linear である．よって

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\phi"'] & Y \arrow[d, "^\exists \psi\ an\ R-linear."] \\ & \mathrm{Hom}_R(S, M) & M \end{tikzcd}$$

今 $^\forall y{\in}Y$, $\widehat{y} : S \to M$, $s \mapsto \psi(sy)$ とすると, $\widehat{y}$ は R-linear. $\therefore\ \widehat{y}{\in}\operatorname{Hom}_R(S,M)$. よって $g : Y \to \operatorname{Hom}_R(S,M)$, $y \mapsto \widehat{y}$ とすると $^\forall s{\in}S$,

$$\begin{aligned}\widehat{y+z}(s) = \phi(s(y+z)) = \widehat{y}(s) + \widehat{z}(s).\\ \widehat{ry}(s) = \phi(s(ry)) = \phi((sr)y) = r\widehat{y}(s).\end{aligned}$$

$\therefore\ g$ は R-linear. そして

$$\begin{aligned}&< (g\alpha)(x), s >=< g(\alpha(x)), s >= \psi(s\alpha(x)).\\ &< f(x), s >=< sf(x), 1 >=< f(sx), 1 >= \phi(sx) = \psi(\alpha(sx)).\end{aligned}$$

$\therefore\ g\alpha = f$. $\square$

Lemma 1.5.3. $I{\in}R-\operatorname{mod}$ について

$$\begin{aligned}I\text{が}\ \textit{injective}. \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}) = (0) \quad {}^\forall\mathfrak{a}{\subseteq}R;\ \textit{an ideal}.\\ &\Rightarrow \quad \operatorname{Ext}^i_R(X,I) = (0) \quad {}^\forall i > 0,\ {}^\forall X{\in}R-\operatorname{mod}.\\ (\quad &\Leftarrow \quad \text{も正しい.})\end{aligned}$$

Proof. I が injective であれば, $\cdots \to P_i \to \cdots \to P_0 \to X \to 0$ を a projective resolution としたとき $\cdots \to 0 \to X^* \to P_0^* \to \cdots \to P_i^* \to \cdots$ は exact. $\therefore \operatorname{Ext}^i_R(X,I) = (0)$ ($^\forall i > 0$, $^\forall X{\in}R-\operatorname{mod}$) を得る.
さて $^\forall\mathfrak{a}{\subseteq}R$; ideal, $\operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, I) = (0)$ と仮定しよう. このとき

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ & I & \end{tikzcd}$$

を与え

$$\mathcal{S} = \left\{ (Z,g) \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha(X){\subseteq}Z{\subseteq}Y;\ R-submodule,\ g : Z \to I;\ an\ R-linear\ map \\ s,t\ g(\alpha(x)) = f(x)\ for\ {}^\forall x{\in}X \end{array} \right\}$$

とおく. $\mathcal{S}{\neq}\emptyset$ である. そして

$$(Z,g){\leq}(Z',g'), \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} Z{\subseteq}Z'\text{かつ}\ g'|_Z = g,$$

により $\mathcal{S}$ を an ordered set とみなす. $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ a chain とする. $Z_0 = \bigcup_{(Z,g)\in\mathcal{C}} Z$ とおくと $Z_0{\subseteq}Y$ an R-submodule で $\alpha(X){\subseteq}Z_0$ をみたす. $Z_0{\ni}^\forall x$, $^\exists(Z,g){\in}\mathcal{C}$ s,t $x{\in}Z$. このとき $g(x)$ は I によらない.
$\therefore\ ^\exists g_0 : Z_0 \to I$ an R-linear s,t $x \mapsto g(x)$. $g_0(\alpha(x)) = f(x)$ $^\forall x{\in}Z_0$. $\therefore (Z_0, g_0){\in}\mathcal{S}$, $(Z,g){\leq}(Z_0,g_0)$ for $^\forall(Z,g){\in}\mathcal{C}$. $\therefore\ ^\exists(Z,g){\in}\mathcal{S}$ a maximal element. もし $Z{\subsetneq}Y$ であれば $y{\in}Y{\setminus}Z$ をとり $Z' = Z + Ry$ とおくと $^\exists\mathfrak{a}{\subset}R$; ideal s,t

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "^\exists g'"] & R/\mathfrak{a} \arrow[r] & 0 \quad exact \\ & I & & & \end{tikzcd}.$$

$\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, I) = (0)$ より g' を得る．しかしこれは (Z, g) の極大性に反する．よって $Z = Y$ である． $\square$

Lemma 1.5.4. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$-*injective* である．

Proof. $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, *) = (0)$ をみる．$R = \mathbb{Z} \supseteq \mathfrak{a} \neq (0)$ としてよい．
$\mathfrak{a} = a\mathbb{Z}$ $(a > 0)$ とかくと $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\widehat{a}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathfrak{a} \to 0$ exact より

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, X) \arrow[r, "\widehat{a}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{Z}/\mathfrak{a}, X) \arrow[r] & 0 \quad \textit{exact} \\
X \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\widehat{a}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[u, "\wr"'] & &
\end{tikzcd}.$$

$\therefore X = aX$ なら $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, X) = (0)$. $\square$

これが $\mathrm{id}_R X = 0$ を定めることに注意すること．(PID 上の module については divisible と injective は同値である．)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} F \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
$$\textit{exact in } \mathbb{Z}-\mathrm{mod}.$$

上の可換図で C は divisible であることが明らか．よって

Lemma 1.5.5. ${}^{\forall}M \in \mathbb{Z}-\mathrm{mod}$ に対して ${}^{\exists}$*exact in* $\mathbb{Z}-\mathrm{mod}$;　$0 \to M \to X$ *where* X は *injective.*

Theorem 1.5.6. ${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$ に対して ${}^{\exists}$*exact*;　$0 \to M \to I$ *where* I は *injective.*

Proof. $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ を a ring homomorphism とせよ．そして $M \in \mathbb{Z}-\mathrm{mod}$ とみよ．${}^{\exists}$*exact in* $\mathbb{Z}-\mathrm{mod}$;　$0 \to M \xrightarrow{f} X$ where X は $\mathbb{Z}$-injective. このとき $I := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, X)$ は R-injective である．$\alpha : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ を $m \mapsto \widehat{m}$ where $\widehat{m}(r) = rm$ for ${}^{\forall}r \in R$ とおく．$\widehat{m}$ は R-linear なので $\alpha : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ a map であって，さらに $\widehat{m + m'} = \widehat{m} + \widehat{m'}$, $\widehat{rm} = r\widehat{m}$ for ${}^{\forall}m, m' \in M$, ${}^{\forall}r \in R$ をみたすので，α は an R-linear map である．よって

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, X) = I \\
M \arrow[ur, dotted, "\alpha"] & &
\end{tikzcd}$$

となり

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha \cdot f_*} I \quad \textit{exact}$$

を得る． $\square$

Theorem 1.5.7. *R Noetherian* なら $^\forall$*injective* $R-module$ の直和は *injective* である. そして逆も正しい. つまり $^\forall\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *where* X_α は *R-injective for* $^\forall\alpha\in\underset{a\,set}{\Lambda}\neq\emptyset$ に対して $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ が *R-injective* なら R は *Noetherian* である.

Proof. R Noetherian とする.
$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を injective R-modules の族とすと $X=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ について

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},X)\cong\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a},X_\alpha)$$

である. これは $M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のとき

$$\mathrm{Hom}_R(M,X)\cong\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M,X_\alpha)$$

による.
$^\forall\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ where X_α は R-injective for $^\forall\alpha\in\underset{a\,set}{\Lambda}\neq\emptyset$ に対して $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ が R-injective を仮定する.
$I_0\subseteq I_1\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots$ を R の ideal の a chain とし, $I=\bigcup_{n\geq0}I_n$ とする. $^\forall n\geq0$, $^\exists 0\to I/I_n\to E_n$ exact where E_n は R-injective. $\therefore$ $^\exists\varphi_n:I\to I/I_n\to E_n$ an R-linear. すると $^\forall a\in I$, $^\exists n\geq0$ s,t $a\in I_n$. $\therefore$ $^\forall i\geq n$, $\varphi_i(a)=0$. $\therefore$ $^\exists\varphi=\prod_{n\geq0}\varphi_n:I\to\bigoplus_{n\geq0}E_n=:E$ an R-linear map. よって

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[dl, dotted, "^\exists g"] \\
 & E &
\end{tikzcd}.$$

$\therefore$ $\varphi(I)\subseteq R\cdot g(1)$.
$\therefore$ $^\exists k\geq0$ s,t $^\forall i>k$, $^\forall a\in I$, $\varphi_i(a)=0$. $\therefore$ $^\forall a\in I$, $^\forall i>k$, $a\in I_i$. $\therefore$ $I=I_i$. □

Remark 1.5.8. 上の定理を用いて *Eakin*-永田の定理を証明することができる. また後にふれる様に R が *Noetherian* であるときは *injective module* にすぐれた構造定理がある.

Definition 10. $f:M\to N$ *an R-linear map* として, もし $X\subseteq N$ *an R-submodule* について $f(M)\cap X=(0)$ なら $X=(0)$ をみたすとき, この f を *an essential map* という. とくに $M\subseteq N$ で M が N の *essential* であるとは, $i:M\to N$ が *essential* であることをいう.

Theorem 1.5.9. $^\forall M\in R-\mathrm{mod}$, $^\exists$*exact in* $R-\mathrm{mod}$; $0\to M\xrightarrow{f}I$ *where* I は *injective* で f は *essential* である. このような $(I.f)$ は同型を除いて唯一である.

Proof. (uniqueness)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & I \arrow[d, dotted, "{}^{\exists}h"] \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"'] & J \end{tikzcd}.$$

このとき h は単射であって $J \overset{\oplus}{>} h(I)$. $\therefore h$ は bijective である.

(existance)

$M \subseteq I$ for some I は R-injective としてよい. ここで

$$\mathcal{S}_1 = \{ J \subseteq I | M \subseteq J \text{ であって } M \text{ は } J \text{ 内で } \textit{essential} \}$$

とおく. $M \in \mathcal{S}_1 \neq \emptyset$ であって包含関係を順序に inductive である. ${}^{\exists}J \in \mathcal{S}_1$; max element. ここで

$$\mathcal{S}_2 = \{ L | L \text{ は } I \text{ の } R-\textit{submodule},\ L \cap J = (0) \}$$

とおくと $(0) \in \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$ であって, この $\mathcal{S}_2$ も包含関係を順序に inductive である. $\therefore {}^{\exists}L \in \mathcal{S}_2$; max element. ここで $i : J \to I$, $\varepsilon : I \to I/L$ とおくと εi は単射かつ essential である. よって

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "\varepsilon i"] \arrow[d, "i"'] & I/L \arrow[dl, dotted, "\alpha"] \\ & I & \end{tikzcd}.$$

この α は単射である. よって $I \supseteq \operatorname{Im}\alpha \supseteq J \supseteq M$, $J \subseteq \operatorname{Im}\alpha$; essential となる. $M \subseteq J$; essential であったので $M \subseteq \operatorname{Im}\alpha$ essential となり $J = \operatorname{Im}\alpha$ をえる. $\therefore \varepsilon i$ onto. $\therefore J$ は R-injective. □

Remark 1.5.10. この定理によって定まった I を M の *the injective envelop (or hull)* という.

Definition 11. $M \in R-\mathrm{mod}$ について
$S = \left\{ n \geq 0 | \ {}^{\exists}exact;\quad 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^n \to 0 \quad where\ I^i \text{は}\ injective \right\}$ とおき

$$\mathrm{id}_R M = \begin{cases} -\infty & M = (0) \\ \min S & M \neq 0,\ S \neq \emptyset \\ \infty & otherwise \end{cases}$$

とする.

Lemma 1.5.11. $M \in R-\mathrm{mod}$ について $0 \to M \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^i \to \cdots$ を M の *a minimal injective resolution* とする. このとき

(1) $M = (0)$ なら $I^i = (0)$ ${}^{\forall}i \geq 0$.

(2) $M{\neq}(0)$ のとき $\operatorname{id}_R M = \infty$ ならば $I^i{\neq}(0)$, ${}^\forall i{\geq}0$.
(3) $M{\neq}(0)$, $\operatorname{id}_R M < \infty$ とすると $I^i = (0)$ (${}^\forall i{\geq}n+1$) であって $I^n{\neq}(0)$ である.

Proof. (1),(2) は自明. (3) ${}^\exists exact;\ \ 0 \to M \to J^0 \to J^1 \to \cdots \to J^m \to 0$ where $m{\geq}0$, ${}^\forall J^i$ は injective.

$$\begin{CD}
0 @>>> M @>>> I^0 @>>> I^1 @>>> \cdots @>>> I^m @>>> \cdots \\
@. @| @VV{f^0}V @VV{f^1}V @. @VV{f^m}V \\
0 @>>> M @>>> J^0 @>>> J^1 @>>> \cdots @>>> J^m @>>> 0 @>>> \cdots \\
@. @| @VV{g^0}V @VV{g^1}V @. @VV{g^m}V \\
0 @>>> M @>>> I^0 @>>> I^1 @>>> \cdots @>>> I^m @>>> \cdots
\end{CD}$$

を見て $g^i f^i$ は全て bijective を得る. よって f^i は全て単射.
$\therefore I^{m+1} = (0)$; $I^i = (0)\ {}^\forall i > m$. よって $I^i = (0)\ {}^\forall i > n$, もちろん $I^n{\neq}(0)$ である. □

Proposition 1.5.12. $M{\in}R-\mathrm{mod}$, $n{\geq}0$ とすると

$$\begin{aligned}
\operatorname{id}_R M{\leq}n. \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ext}_R^i(X, M) = (0) \ \ {}^\forall i > n,\ {}^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}\,. \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{a}, M) = (0) \ \ {}^\forall \mathfrak{a}{\subseteq}R;\ \textit{an ideal}.
\end{aligned}$$

Proof. まず "$\operatorname{id}_R M{\leq}0. \Leftrightarrow M$ は *injective.*" に注目する. よって $n = 0$ で正しい. $n{\geq}1$ とせよ. このとき

$$\operatorname{id}_R M{\leq}n. \Rightarrow {}^\exists exact;\ \ 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^n \to 0 \quad where\ I^i は\ injective.$$

$\therefore {}^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}$, ${}^\forall i > n$, $\operatorname{Ext}_R^i(X, M) = (0)$.
もし $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{a}, M) = (0)\ {}^\forall \mathfrak{a}{\subseteq}R$; ideal ならば

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^{n-1} \to X \to 0 \ \ exact\ where\ I^0, I^1, \cdots, I^{n-1} は\ injective.$$

をとり, これを short exact sequence に分解して $\operatorname{Ext}_R^*(R/\mathfrak{a}, *)$ を apply すると $\operatorname{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, X) = (0)$ となり X は R-injective を得るであろう. □

Definition 12. $\operatorname{gl.dim} R := \sup\limits_{M{\in}R-\mathrm{mod}} \operatorname{hd}_R M$ とおく.

Remark 1.5.13. $n = \operatorname{gl.dim} R < \infty$ なら ${}^\forall M{\in}R-\mathrm{mod}$ に対して $\operatorname{id}_R M, \operatorname{hd}_R M{\leq}n$ となることに注意すること.

Proposition 1.5.14. $\operatorname{gl.dim} R = \sup\limits_{\mathfrak{a}{\subseteq}R;\ ideal} \operatorname{hd}_R R/\mathfrak{a}$.

Proof. $n = \sup\limits_{\mathfrak{a}{\subseteq}R;\ ideal} \operatorname{hd}_R R/\mathfrak{a}$ とおく. $n < \infty$ として十分. ${}^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}$, $\operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, X) = (0)\ {}^\forall i > n$.
$\therefore \operatorname{id}_R X{\leq}n$. $\therefore {}^\forall M{\in}R-\mathrm{mod}$, $\operatorname{Ext}_R^i(M, X) = (0)\ {}^\forall i > n$. $\therefore \operatorname{hd}_R M{\leq}n$. □

Corollary 1.5.15. $(R, \mathfrak{m})$ *Noeth local* のとき

(1) $\operatorname{gl.dim} R = \operatorname{hd}_R R/\mathfrak{m}$.

(2) もし $\mathrm{gl.dim}\, R < \infty$ ならば ${}^{\forall}\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathrm{gl.dim}\, R_{\mathfrak{p}} < \infty$.

従って $\mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m} < \infty$ ならば ${}^{\forall}\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathrm{hd}_{R_{\mathfrak{p}}}\, R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} < \infty$ となる.

Proof. (1) $n = \mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m} < \infty$ なら $\mathrm{hd}_R\, M \leq n$, ${}^{\forall}M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ であった. $\therefore n \geq \mathrm{gl.dim}\, R$.
(2) は $R/\mathfrak{p}$ を見よ. □

Example 1.5.16.
(1) $R = a\ field.$ $\Rightarrow$ $\mathrm{gl.dim}\, R = 0$. $\Leftrightarrow$ ${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$ は *projective.*
(2) R が *Dedekind domain* で体でないなら $\mathrm{gl.dim}\, R = 1$. (とくに $\mathrm{gl.dim}\, \mathbb{Z} = 1$ である.)

Proof. (1) は自明.
(2) を見るに, ${}^{\forall}I \subseteq R$; ideal, $I \in \underline{\underline{\mathrm{P}}}(R)$ であったから $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ exact より $\mathrm{hd}_R\, R/I \leq 1$ となる. $\therefore \mathrm{gl.dim}\, R \leq 1$. もし $\mathrm{gl.dim}\, R = 0$ なら R は Artinian なので体となる. $\therefore \mathrm{gl.dim}\, R = 1$. □

Example 1.5.17. R を *integral domain* として K を商体とすると, K は *injective R-module* で $R \subseteq K$ *essential* である. よって

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は *a min injective resolution of* $\mathbb{Z}$ となる.

Proof.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Y \\
& K &
\end{tikzcd}$$

を見るに

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] \arrow[ddr, "f"'] & & Y \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& K \otimes_R X \arrow[rr, "K \otimes_R \alpha"] \arrow[d, "{}^{\exists 1}g"] & & K \otimes_R Y \arrow[dll, dotted, "{}^{\exists}h\ \ K-linear"] \\
& K & &
\end{tikzcd}.$$

$\therefore (h \cdot \varphi) \cdot \alpha = f$. $0 \neq {}^{\forall}x \in K$, $x = \dfrac{a}{b}$ とかくと $a \in Rx \cap R \neq (0)$. よって $R \subseteq K$ essential. □

以上のような理論を一般化することをこれから工夫するわけである.

1.6 Regular local rings

以下, $(R, \mathfrak{m})$ は a Noetherian local ring とし $d = \dim R$ とおく.

Definition 13. R が *regular* である. $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{gl.dim}\, R (= \mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m}) < \infty$.

Lemma 1.6.1. *$d = 0$ のときは R regular. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{gl.dim}\, R = 0$.*

Proof. $\Leftarrow$ は自明. $\Rightarrow$ を示す. $d = 0$ より ${}^{\exists}\ell{\geq}0$ s,t $\mathfrak{m}^{\ell}{\neq}(0)$, $\mathfrak{m}^{\ell+1} = (0)$. $0 \to \mathfrak{m}^{\ell} \to R \to R/\mathfrak{m}^{\ell} \to 0$ をみるに $\mathfrak{m}^{\ell} \cong (R/\mathfrak{m})^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ in $R-\mathrm{mod}$. $n = \mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m}$ とすると, $0{\leq}n < \infty$, $n = \mathrm{hd}_R\, \mathfrak{m}^{\ell}$ であって ${}^{\exists}X{\in}R-\mathrm{mod}$ s,t $\mathrm{Ext}^n_R(\mathfrak{m}^{\ell}, X){\neq}(0)$. よって

$$\mathrm{Ext}^n_R(R, X) \to \mathrm{Ext}^n_R(\mathfrak{m}^{\ell}, X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{m}^{\ell}, X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(R, X) = 0.$$

もし $n > 0$ ならば, $(0){\neq}\mathrm{Ext}^n_R(\mathfrak{m}^{\ell}, X){\cong}\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{m}^{\ell}, X)$ より $\mathrm{hd}_R\, X{\geq}n+1$ となり矛盾. $\therefore n = 0$ であって $R/\mathfrak{m}$ は R-free より $\mathfrak{m} = (0)$ をえる. よって R は体である. □

Lemma 1.6.2. *A は可換環とする. $I, J, K, P_1, \cdots, P_n$ を R の ideals $(n{\geq}0,\ P_i{\in}\mathrm{Spec}\, R)$ とする. このとき*

$$I{\subseteq}J \cup K \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_i \Rightarrow I{\subseteq}J \text{ or } I{\subseteq}K \text{ or } I{\subseteq}P_i \text{ for some } i,$$

が成立する.

Lemma 1.6.3 (Zariski-Samuel). *A は Noetherian とする. $I, M{\subseteq}A$ を ideals in A とすると ${}^{\exists}J{\subseteq}A$; ideal, ${}^{\exists}s{\geq}0$ s,t $IM = I \cap J$, $M^s{\subseteq}J$.*

Proof. $IM = A$ なら $I = M = A$ なので $J = A$, $s = 1$ とすればよい.
$IM{\neq}A$ として

$$IM = \bigcap_{Q\in \mathrm{Ass}_A\, A/IM} \mathfrak{a}(Q)\ :\ a\ primary\ decomposition$$

とする. もし ${}^{\forall}Q{\in}\mathrm{Ass}_A\, A/IM$, $Q{\supseteq}M$ であれば ${}^{\exists}s > 0$ s,t $M^s{\subseteq}IM$. $\therefore J = IM$ とすればよい.
もし ${}^{\forall}Q{\in}\mathrm{Ass}_A\, A/IM$, $Q \not\supseteq M$ なら $\mathfrak{a}(Q){\supseteq}IM$ なので $\mathfrak{a}(Q){\supseteq}I$ より $IM{\supseteq}I$. $\therefore IM = I$. $\therefore J = R$, $s = 1$ とせよ. よって

$$\mathcal{F}_1 := \{Q{\in}\mathrm{Ass}\, A | Q{\supseteq}M\}, \quad \mathcal{F}_2 := \{Q{\in}\mathrm{Ass}\, A | Q{\not\supseteq}M\}$$

とし $\mathcal{F}_i{\neq}\emptyset$ $(i = 1, 2)$ とすると

$$K = \bigcap_{Q\in\mathcal{F}_2} \mathfrak{a}(Q), \quad J = \bigcap_{Q\in\mathcal{F}_1} \mathfrak{a}(Q)$$

とすれば上に述べた如く, $J{\supseteq}M^s$ ${}^{\exists}s > 0$; $K{\supseteq}I$. $\therefore IM{\subseteq}I \cap J \subseteq K \cap J = IM$. □

Lemma 1.6.4 (Zariski-Samuel). *A は Noetherian のとき ${}^{\forall}\mathfrak{a}{\subseteq}A$; an ideal に対して $I = \bigcap_{i>0} \mathfrak{a}^i$ とおくと*

$$I = \mathfrak{a}I$$

である. 従って, ${}^{\exists}a{\in}\mathfrak{a}$ s,t $(1-a)I = (0)$.

Proof. $\mathfrak{a}I = I \cap J$, $\mathfrak{a}^s \subseteq J$ $(^\exists s > 0)$ とかくと, $I \subseteq \mathfrak{a}^s \subseteq J$. $\therefore \mathfrak{a}I = I$. □

もう一つの Prime adoivance.

Lemma 1.6.5 (Davis). *A を可換環とし, $I \subseteq A$; an ideal として $P_1, \cdots, P_n \in \operatorname{Spec} A$ $(n > 0)$, $a \in A$ とする. このとき*

$$(a) + I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i \Rightarrow {}^\exists i \in I \ s,t \ a + i \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i.$$

Proof. $n = 1$ のときは $a \notin P$ ならば $i = 0$ とせよ. $a \in P$ ならば $I \not\subseteq P \Rightarrow {}^\exists i \in I \backslash P$. もちろん $a + i \notin P$ である. $n > 1$ として十分. このとき $1 \le i \le n$ についてもし $1 \le {}^\exists j \le n$ s,t $i \ne j$, $P_i \subseteq P_j$ ならば $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = \bigcup_{j \ne i}^{n} P_j$ となり n についての induction に従う. よって $1 \le {}^\forall i \le n$ に対して $P_i \not\subseteq P_j$ $({}^\forall j \ne i)$ としてよい.
$\mathcal{F}_1 = \{1 \le i \le n | a \in P_i\}$, $\mathcal{F}_2 = \{1 \le i \le n | a \notin P_i\}$ とおく.
Case,1 $(\mathcal{F}_1 \ne \emptyset$, $\mathcal{F}_2 \ne \emptyset)$
　このときは

$${}^\exists y \in \bigcap_{i \in \mathcal{F}_2} P_i \not\subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{F}_1} P_i \not\ni y.$$

また $I \not\subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{F}_i} P_i$ より

$${}^\exists \alpha \in I \backslash \bigcap_{i \in \mathcal{F}_1} P_i. \qquad \therefore\ a + y\alpha \notin \bigcap_{i=1}^{n} P_i.$$

Case,2 $(\mathcal{F}_1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_2 \ne \emptyset)$ このときは $i = 0$ とせよ.
Case,3 $(\mathcal{F}_1 \ne \emptyset$, $\mathcal{F}_2 = \emptyset)$ このときは上で $a + \alpha$ をとれ. □

Remark 1.6.6.
A を可換環として $I = (a_1, \cdots, a_n) \subset A$ where $a_1, \cdots, a_n$ は an A-regular sequence. $\Rightarrow \operatorname{hd}_A A/I < \infty$.

Proof. $\overline{R} := R/a_1 R$ 上 $\operatorname{hd}_{\overline{R}} R/I < \infty$. $0 \to R \xrightarrow{a_1} R \to \overline{R} \to 0$ より $\operatorname{hd}_R \overline{R} < \infty$ by induction on n.
$\therefore \operatorname{hd}_R R < \infty$. □

Proposition 1.6.7. *$d = 1$ のときは次は同値である.*

(1) *R は a regular local ring である.*
(2) *R は a DVR である. つまり, R は an integral domain で $\mathfrak{m} = (x)$ for some $x \in R$, かつ $(0) \ne {}^\forall I \subseteq R$ ideal, ${}^\exists \ell \ge 0$ s,t $I = \mathfrak{m}^\ell$.*
(3) *$\mathfrak{m} = (a)$ for some $a \in R$.*

このとき $\operatorname{gl.dim} R = 1$ となっている.

Proof. (3)⇒(1) ${}^\exists P \in \operatorname{Spec} R$ s,t $P \subsetneq \mathfrak{m}$. ${}^\forall x \in P$, $x = ay \in P$ より $y \in P$. $\therefore P = aP$ で Nakayama's Lemma から $P = (0)$ となり R は an integral domain である. $0 \to R \xrightarrow{\widehat{a}} R \to R/\mathfrak{m} \to 0$ より $\operatorname{hd}_R R/\mathfrak{m} = 1$ となり $\operatorname{gl.dim} R = 1$ をえる.
(1)⇒(3) $n = \operatorname{gl.dim} R = \operatorname{hd}_R R/\mathfrak{m}$ とすると, $d = 1$ より $\mathfrak{m} \ne (0)$. $\therefore n > 0$. $0 \to F_n \xrightarrow{\partial} F_{n-1} \to$

$\cdots \to F_0 \to R/\mathfrak{m} \to 0$ を $R/\mathfrak{m}$ の a min free resolution とすれば $F_n \neq (0)$. ここでもし $\mathrm{Ass}\, R \ni \mathfrak{m}$ ならば $0 \neq {}^{\exists}x \in R$ s,t $x\mathfrak{m} = (0)$. resolution の取り方から $\partial(xF_n) = (0)$ より $F_n = (0)$ となり矛盾. $\therefore\ \mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}\, R$.

$$\therefore\ \mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}\, R} Q.$$

$\therefore\ {}^{\exists}x \in \mathfrak{m}$ s,t $x \notin \mathfrak{m}^2$, $x \notin Q$ for ${}^{\forall}Q \in \mathrm{Ass}\, R$. $\therefore\ R/xR$ 上 $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ は $\mathrm{hd}_{R/xR}\, \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} < \infty$.

Claim 1. $\mathfrak{m} = (x) + J$ とかくと $\overline{R} := R/xR$,

$$\frac{R}{\mathfrak{m}} \lhd\!\!\oplus \frac{\mathfrak{m}}{x\mathfrak{m}} = \overline{R}\overline{x} \oplus \frac{J + x\mathfrak{m}}{x\mathfrak{m}}.$$

Proof of Claim. $a \in R$ とする. $ax \in J + x\mathfrak{m}$ ならば ${}^{\exists}m \in \mathfrak{m}$ s,t $x(a-m) \in J$. よって $a - m \in \mathfrak{m}$ となり従って $a \in \mathfrak{m}$, $ax \in x\mathfrak{m}$ をえる. □

$\therefore\ \mathrm{hd}_{\overline{R}}\, R/\mathfrak{m} < \infty$. $\therefore\ \dim \overline{R} = 0$ より $\overline{R}$ は体である. $\therefore\ \mathfrak{m} = xR$.
(3)⇒(2) これは次の Lemma を見よ. □

Lemma 1.6.8. $(R, \mathfrak{m})$ は *a Noetherian local ring* とし $d > 0$ とする. もし $\mathfrak{m} = (x)$ *for some* $x \in R$ であれば, R は *an integral domain,* $\mathrm{Spec}\, R = \{(0), \mathfrak{m}\}$ であって, かつ $(0) \neq {}^{\forall}I \subseteq R$; *an ideal* は $I = (x^{\ell})\ {}^{\exists 1}\ell \geq 0$, とくに $d = 1$ である.

Proof. $d \neq 0$ より $Q \in \mathrm{Spec}\, R$ を $Q \neq \mathfrak{m}$ にとると, ${}^{\forall}f \in Q$, $f = gx\ {}^{\exists}g \in R$. $x \notin Q$ から $g \in Q$. $\therefore\ Q = xQ$.
$\therefore Q = (0)$, R は an integral domain であって $\mathrm{Spec}\, R = \{(0), \mathfrak{m}\}$ を得る. よって $d = 1$ である. $(0) \neq {}^{\forall}I \subsetneq R$ ideal をとると, I は $\mathfrak{m} - primary$. $\therefore\ {}^{\exists}\ell \geq 0$ s,t $x^{\ell} \in I$. $\mathcal{S} = \{i | \mathfrak{m} \supseteq I\}$ とおくと $\mathcal{S} \neq \emptyset$ で ${}^{\forall}i \in \mathcal{S}$, $i \leq \ell$.
$\therefore\ i = \max \mathcal{S}$ をとると $\mathfrak{m}^i \supseteq I \not\subseteq \mathfrak{m}^{i+1}$, ${}^{\exists}z \in R$ s,t $z \in I$, $z \notin \mathfrak{m}^{i+1}$. $z = ux^i$ とかくと $u \notin \mathfrak{m}$. $\therefore\ I = \mathfrak{m}^i$.
$I = \mathfrak{m}^j$ なら $x^i = \varepsilon x^j$, $x^j = \tau x^i$ より $\varepsilon, \tau \in \mathrm{U}(R)$. $\therefore\ \mathfrak{m}^i = \mathfrak{m}^j$ から $i = j$ (中山). □

Theorem 1.6.9. R; *a RLR.* $\Leftrightarrow \mu_R(\mathfrak{m}) = d$.
このとき $\mathrm{gl.dim}\, R = d$ となる. また R は *an integral domain* である.

Proof. $d = 0, 1$ で正しい. さて R は a RLR としてみよう. $n = \mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m}$ とおく. $d \geq 2$ としてよい. よって $n > 0$. 上の証明より ${}^{\exists}x \in \mathfrak{m}$ s,t $x \notin \mathfrak{m}^2$, x は $R - nzd$. このとき $\overline{R} := R/xR$ 上 $\mathrm{hd}_{\overline{R}}\, \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} < \infty$ より $\overline{R}$ は a RLR. 一方で $\dim \overline{R} = d - 1$ より d についての induction で $\mu_R(\mathfrak{m}/xR) = d - 1$; $x \notin \mathfrak{m}^2$ より $\mu_R(\mathfrak{m}) = d$ である. $\mathrm{gl.dim}\, \overline{R} = d - 1$ で $\overline{R}$ は an integral domain であるが, $P \in \mathrm{Spec}\, R$ を $P \subsetneq xR$ にとれるから, ($xR \in \mathrm{Spec}\, R$ で x は $R - nzd$ より min prime $P \subseteq xR$ をとると $P \subsetneq xR$) $P = (0)$ を中山よりうる. よって R は an integral domain である.

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to R/\mathfrak{m} \to 0$$

を $R/\mathfrak{m}$ の a min free resolution in $R - \mathrm{mod}$ とすると $F_0 = R$ であるから

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_2 \to F_1 \to \mathfrak{m} \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{m} \to R \to R/\mathfrak{m} \to 0$$

と分解すると

$$\begin{array}{ccc} 0 \to \overline{F_n} \to \overline{F_{n-1}} \to \cdots \to \overline{F_1} \to \overline{F_0} \to & \overline{\mathfrak{m}} & \to 0 \\ & \| & \\ & \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \quad \oplus R/\mathfrak{m} & \end{array}$$

は $\overline{\mathfrak{m}}$ の a min free resolution in $\overline{R} - \mathrm{mod}$ ($\overline{R} = R/xR$) を与える.
$\therefore n-1 = \mathrm{hd}_{\overline{R}}\,\overline{\mathfrak{m}} = \mathrm{gl.dim}\,\overline{R}$. $\overline{R}$ は a RLR であったから induction の仮定を見るに $n-1 = \mathrm{gl.dim}\,\overline{R} = \dim \overline{R} = d-1$. $\therefore n = d$.
($\Rightarrow$) $d = 0, 1$ で正しい. $d \geq 2$ として $d-1$ まで正しいとする. $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_d)$, $x := x_1$ とし $\overline{R} = R/xR$ とすると, $\dim \overline{R} \leq d-1$ であるが $\dim \overline{R} < d-1$ はありえないので $\dim \overline{R} = d-1$ となる. よって $\overline{R}$ は a RLR である. $x_1, \cdots, x_d$ をとりかえて

$$\mathfrak{m} \ni x_1 \notin \mathfrak{m}^2 \cup \bigcup_{Q \in \mathrm{Min}\, R} Q$$

にとると ${}^{\exists}P \in \mathrm{Min}(R)$ s,t $P \subsetneq xR$. $\therefore R$ は an integral domain である. よって $x = x_1$ は an $R-nzd$. 今,

$$0 \to \overline{F_{d-1}} \to \overline{F_{d-2}} \to \cdots \to \overline{F_0} \to R/\mathfrak{m} \to 0$$

を $R/\mathfrak{m}$ の a min free resolution in $\overline{R} - \mathrm{mod}$ とするとき, これを short exact sequence に切ると左からつめていくことにより $0 \to R \xrightarrow{\widehat{x}} R \to \overline{R} \to 0$ から $\mathrm{hd}_R\, \overline{R} < \infty$. $\therefore \mathrm{hd}_R\, R/\mathfrak{m} < \infty$, R は a regular local ring である. □

Corollary 1.6.10 (Serre). *R は a RLR である. $\Rightarrow$ $R_{\mathfrak{p}}$ は a RLR, ${}^{\forall}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ である.*

第2章　Cohen-Macaulay Rings

2.1 Flat base changes

$\varphi : R \to S$ を a ring homomorphism とせよ. $(R, \mathfrak{m})$, $(S, \mathfrak{n})$ がどちらも局所環のとき, φ が local であるとは, $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ が成立することをいう.

Lemma 2.1.1. $^{\forall}P \in R - \mathrm{mod}$ で *projective*, $S \otimes_R P$ は $S - $*projective* である.

Proof. free $\Rightarrow$ free による. □

以下, $\varphi : R \to S$ は flat とする.

Proposition 2.1.2. $(R, \mathfrak{m})$, $(S, \mathfrak{n})$ は *local* で, φ が *local* なら $M \in R - \mathrm{mod}$ について

$$S \otimes_R M = (0) \Rightarrow M = (0).$$

Proof. $M \neq (0)$ なら $0 \neq {}^{\exists}x \in M$. $\therefore L = Rx$ とすると $S \otimes_R L = (0)$. よって

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] & L/\mathfrak{m}L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& R/\mathfrak{m} &
\end{tikzcd}.$$

であるが, $S \otimes_R *$ をみて矛盾. □

Lemma 2.1.3. $^{\forall}Q \in \operatorname{Spec} S$, $\mathfrak{p} := Q \cap R$ とすれば $f : R_{\mathfrak{p}} \to S_Q$ は *flat* である. もちろん f は *local* でもある.

Proof.

$$\begin{tikzcd}
R_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "^{\exists 1} f"] & S_Q \quad \textit{a ring homom} \\
R \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & S \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

をうる. $^{\forall}R_{\mathfrak{p}}-exact$;　$0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y$ について

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{\mathfrak{p}} \otimes_R X \arrow[r, "R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \alpha"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S_Q \otimes_S Y \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"'] & Y
\end{tikzcd} \quad exact.$$

による. □

Remark 2.1.4. $M \in R-\mathrm{mod}$ が *f, present* であれば

$$S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, X) \cong \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R X) \quad {}^{\forall}X \in R-\mathrm{mod}\,.$$

である. これより R が *Noetherian* のときは

$$S \otimes_R \mathrm{Ext}^i_R(M, X) \cong \mathrm{Ext}^i_S(S \otimes_R M, S \otimes_R X) \quad {}^{\forall}M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R),\ {}^{\forall}X \in R-\mathrm{mod}$$

をうる.

Proposition 2.1.5. $(R, \mathfrak{m})$, $(S, \mathfrak{n})$ は *Noeth local* で φ は *local* とする. このとき

$$\dim S = \dim R + \dim S/\mathfrak{m}S$$

である.

Proof. $d = \dim R$ についての induction による. $d = 0$ ならば $\mathfrak{m}^{\ell} = (0)$ ${}^{\exists}\ell > 0$. $\therefore$ $(\mathfrak{m}S)^{\ell} = (0)$, $\dim S = \dim S/\mathfrak{m}S$. $d > 0$ で $d-1$ まで正しいとせよ. このとき $\dim S = 0$ なら $\mathfrak{n}^{\ell} = (0)$ ${}^{\exists}\ell > 0$. 今 $(\mathfrak{m}S)^{\ell} = (0)$, φ flat local より $\mathfrak{m}^{\ell} = (0)$ となり矛盾. よって $\dim S > 0$. 今

$$\mathfrak{m}S \subseteq \bigcup_{Q \in \mathrm{Assh}\, S} Q \Rightarrow {}^{\exists}Q \in \mathrm{Assh}\, S\ s,t\ Q \cap R = \mathfrak{m}.$$

すると $R \longrightarrow S_Q$ は flat local である. しかし $\dim S_Q = 0$ より $\dim R = 0$ をうるから, これはありえない.

$$\therefore \quad \mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}\, R} \mathfrak{p} \ \cup \bigcup_{Q \in \mathrm{Assh}\, S} (Q \cap R).$$

$\therefore$ ${}^{\exists}f \in \mathfrak{m}$ s,t f は R の ssop で, $\varphi(f)$ は S の ssop である.

$$\therefore \quad \overline{\varphi} : R/fR \longrightarrow S/fS \quad \text{は } \textit{flat local}.$$

よって $\dim S - 1 = \dim S/fS = \dim R/fR + \dim S/\mathfrak{m}S = \dim R - 1 + \dim S/\mathfrak{m}S$ をうるであろう. □

Corollary 2.1.6. R が *Noetherian* のとき $\dim R[X_1, \cdots, X_n] = \dim R + n$ である.

Theorem 2.1.7. $(R, \mathfrak{m})$, $(S, \mathfrak{n})$ が *Noeth local* で φ が *flat local* とする. このとき

(1) S; *a RLR.* $\Rightarrow$ R; *a RLR.*
(2) R, $S/\mathfrak{m}S$; *RLR.* $\Rightarrow$ S; *a RLR.*

Proof. (1) $\cdots \to F_i \to \cdots \to F_0 \to R/\mathfrak{m} \to 0$ を a min free resolution of $R/\mathfrak{m}$ とすると

$$\cdots \longrightarrow S \otimes_R F_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow S \otimes_R F_0 \longrightarrow S/\mathfrak{m}S \to 0$$

は $S/\mathfrak{m}S$ の a min free resolution in $S-\mathrm{mod}$ である. $\therefore S \otimes_R F_i = (0)\ {}^\forall i > \dim S$. $\therefore F_i = (0)\ {}^\forall i > \dim S$.
(2) $d = \dim R$, $n = \dim S/\mathfrak{m}S$ とする. そして $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_d)$ とかくと $\mathfrak{n} = (\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_d)) + (y_1, \cdots, y_n)$ for some $y_j \in S$ である. $\therefore \dim S \leq \mu_S(\mathfrak{n}) \leq d + n = \dim S$. □

Corollary 2.1.8. R が正則局所環であることの必要十分条件は $\widehat{R}$ が正則局所環である.

Remark 2.1.9. 上の定理において (2) については逆は成立しない. 例えば
$\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_{(p)}[X]/(X^2 - p)$ は *a RLR* で $\varphi : \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathbb{Z}_{(p)}[X]/(X^2 - p)$ は *flat local* であるが *fiber* は *a RLR* ではない.

Definition 14. R は *Noetherian* とせよ.

$$R \text{ が } regular \text{ である.} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^\forall P \in \operatorname{Spec} R,\ R_P \text{は } a\ RLR \text{ である.}$$

このとき R は *reduced* である.

Corollary 2.1.10. R が *a regular local ring* であれば $R[X_1, \cdots, X_n]$ $(n > 0)$ は *a regular local ring* である.

Proof. $n = 1$ としてよい. $\varphi : R \to R[X] =: S$ をみるに flat. ${}^\forall P \in \operatorname{Spec} S$ をとり $\mathfrak{p} := P \cap R$ とおくと $R_\mathfrak{p} \to S_P$ は flat local で $R_\mathfrak{p}$ は a RLR である. $S_P/\mathfrak{p}S_P$ は $(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})[X]$ の local ring であって k が体であるときは $k[X]$ は a PID なので, $k[X]$ は a regular local ring である. 従って $S_P/\mathfrak{p}S_P$ a regular local ring. $\therefore S_P$ は a regular local ring. □

Corollary 2.1.11. k が体ならば $R = k[X_1, \cdots, X_n]$ は *a regular local ring* である. このとき $\dim R = n$ となる.

Corollary 2.1.12. $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ は *a RLR* である. $\dim \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n] = n + 1$.

Remark 2.1.13. R が *a regular local ring* ならば $\dim R = \mathrm{gl.dim}\, R$ である. ただし $\dim R < \infty$ とは限らない.

Proof. $\dim R = \sup_{P \in \operatorname{Spec} R} \dim R_P = \sup_{P \in \operatorname{Spec} R} \mathrm{gl.dim}\, R_P$. よって $\mathrm{gl.dim}\, R = \sup_{P \in \operatorname{Spec} R} \mathrm{gl.dim}\, R_P$ を確かめればよい. $n = \mathrm{gl.dim}\, R$, $m = \sup_{P \in \operatorname{Spec} R} \mathrm{gl.dim}\, R_P$ とおく. まず $(m \geq n)$ をいう. $\infty > m$ としてよい. $m > 0$ ならば $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とし $0 \to X \to F_{m-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ exact where F_i は f,g free. をとると ${}^\forall P \in \operatorname{Spec} R$, X_P は free となる.

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \underset{f,g\ free}{F} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

をとり

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(X,Y)$$

をみるに $\left[\mathrm{Ext}^1_R(X,Y)\right]_P = (0)$ より $\mathrm{Ext}^1_R(X,Y) = (0)$. $\therefore X \lessdot\!\!\oplus F$, $\mathrm{hd}_R M \leq m$. $m = 0$ のときは M_P free for ${}^\forall P \in \mathrm{Spec}\, R$ より $X = M$ とすればよい. $\therefore m \geq n$.
$(n \geq m)$ を示す. ${}^\forall P \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathrm{hd}_R R/P \leq n$ より $\mathrm{hd}_{R_P} R_P/PR_P \leq n$. $\therefore \dim R_P = \mathrm{gl.dim}\, R_P \leq n$. □

Corollary 2.1.14. *k a field, $R = k[X_1, \cdots, X_n]$ とすると ${}^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$,*

$$^\exists exact;\ 0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0 \quad where\ F_i \text{は}\ free.$$

Proof. Serre's problem によって ${}^\forall$*projective* は free である. □

Lemma 2.1.15. *R が a Noetherian domain のとき, R 内の height 1 prime が全て単項なら R は a UFD である. (逆も正しい.)*

Theorem 2.1.16. 正則局所環は *UFD* である.

Proof. $d = \dim R$ とおく. $d = 0$ なら R は体である. $d = 1$ なら R は a DVR であって従って R は a PID である. $d \geq 2$ として $d-1$ までは正しいとして十分. $f \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$ をとると R/xR は a regular local ring なので x は R の素元である. $S = \{x^n | n \geq 0\}$ とし $A = S^{-1}R$ を考える.

Claim 2. *$A = a\ UFD$. $\Rightarrow$ $R = a\ UFD$.*

Proof of Claim. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p} = 1$ は単項を示せば十分. $x \notin \mathfrak{p}$ としてよい. $\therefore \mathfrak{p}A$ は単項である.
$\therefore \mathfrak{p}A = \dfrac{a}{s}A$ $({}^\exists a \in R,\ s \in S)$. もちろん $\mathfrak{p}A = aA$ で $a \in \mathfrak{p}$ となる.
$\mathcal{S} := \{I | I \subseteq R$ 単項 *ideal* $s,t\ IA = \mathfrak{p}A\}$ とし $I \in \mathcal{S}$ max elem をとり $I = aR$ とかくとき ${}^\exists s \in S$ s,t $s\mathfrak{p} \subseteq I = aR \subseteq \mathfrak{p}$. ${}^\forall Q \in \mathrm{Ass}_R R/I$ をとると後で示すように $\mathrm{ht}_R\, Q = 1$. もし $s \in Q \Rightarrow x \in Q$. $\therefore xR \subseteq Q$ より $I \subseteq xR = Q$. $\therefore a = xb$ ${}^\exists b \in R$, $aA = bA$ より $bR = I = aR$. $\therefore x \in \mathrm{U}(R)$. (矛盾)
$\therefore {}^\forall Q \in \mathrm{Ass}_R R/I$, $Q \not\ni s$ ので $s\mathfrak{p} \subseteq I$ より $\mathfrak{p} = I$. □

そこで A が UFD を示せばよい. そのために $P \in \mathrm{Spec}\, A$, $\mathrm{ht}_A P = 1$ とする. $\mathfrak{p} = P \cap R$ とすると $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p} = 1$ ので

$$^\exists exact;\ \ 0 \to L_n \to \cdots \to L_0 \to \mathfrak{p} \to 0 \quad where\ n \geq 0;\ L_i \text{は}\ f,g\ free.$$

$$\therefore\quad ^\exists exact;\ \ 0 \to F_n \to \cdots \to F_0 \to P \to 0 \quad where\ n \geq 0;\ F_i \text{は}\ f,g\ free. \qquad (*)$$

ここで ${}^\forall M \in \mathrm{Max}\, A$, $Q = M \cap R$ とおくと $Q \in \mathrm{Spec}\, R$, $x \notin Q$. $\therefore Q \subsetneq \mathfrak{m}$ より $\dim R_Q < d$. $\therefore \dim A_M < d$. d についての仮定より A_M は UFD である. ここで PA_M は $P \subseteq M$ なら単項であるから $P \in \underline{\underline{\mathrm{P}}}(A)$ であって ${}^\forall Q \in \mathrm{Spec}\, A$, $PA_Q \subseteq A_Q$ in $A_Q - \mathrm{mod}$ をうる. $(*)$ から ${}^\exists F, G$ f,g free s,t $P \oplus F \cong G$ (c,f Eisenbud; Commutative Algebra with a view 〜 , p480). local に rank を調べると $P \oplus A^n \cong A^{n+1}$ $({}^\exists n > 0)$ である. このとき $P \cong A$ を示せばよい. $\bigwedge(P \oplus A^n) \cong \bigwedge A^{n+1}$ より $[\bigwedge(P \oplus A^n)]_{n+1} \cong A$.

$$\therefore \sum_{i+j=n+1} \bigwedge^i P \otimes_A \bigwedge^j A^n \cong A.\ \therefore P \otimes_A A \cong A,\ P \cong A.$$ □

外積代数については次節でのべることにして次の *Lemma* を示しておく.

Lemma 2.1.17. $(R,\mathfrak{m})$ *a regular local ring,* $0\neq f\in\mathfrak{m}$ とすると ${}^{\forall}Q\in\mathrm{Ass}_R\,R/fR$, $\mathrm{ht}_R\,Q=1$ である.

Proof. $0\to R/Q\to R/fR$ より $R_Q/QR_Q\hookrightarrow R_Q/fR_Q$. R_Q をとおして $Q=\mathfrak{m}$ として十分. $d=1$ を示す.

$$0\longrightarrow R\xrightarrow{\ \widehat{f}\ }R\longrightarrow R/fR\longrightarrow 0\quad exact$$

より

$$\begin{aligned}0\to\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},R)&\xrightarrow{\widehat{f}}\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},R)\to\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},R/fR)\\&\to\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m},R)\xrightarrow{\widehat{f}}\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m},R)\to\cdots\end{aligned}$$

をうる. このとき $\widehat{f}=0$ であるから

$$\therefore\quad\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},R)=(0),\ (0)\neq\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},R/fR)\cong\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m},R).$$

今, $\mathfrak{m}=(x_1,\cdots,x_d)$ とかくとき $x:=x_1$, $0\to R\xrightarrow{\widehat{x}}R\to R/xR\to 0$ は exact なので上の議論から

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m},R/xR)\neq(0).$$

$\therefore\ \mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}_R\,R/xR$. $xR\in\mathrm{Spec}\,R$ より $\mathfrak{m}=xR$. $\therefore\ d\leq 1$, $d=1$. □

2.2　具体的に resolution をつくろう

${}^{\forall}M\in R-\mathrm{mod}$ を一つ固定する. ${}^{\forall}n\in\mathbb{Z}$ について

$$T_n(M)=\begin{cases}0 & (n<0)\\ R & (n=0)\\ \underbrace{M\otimes_R M\otimes_R\cdots\otimes_R M}_{n\ times} & (n>0)\end{cases}$$

と定める. $T(M)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}T_n(M)$ とすると $T(M)$ は自然に a graded R-algebra となる. (もちろん $T_n(M)\otimes_R T_m(M)\xrightarrow{\sim}T_{n+m}(M)$; natural, $n,m\in\mathbb{Z}$ によって積をさだめる.) $T(M)$ を the tensor algebra of M という. $i:M\hookrightarrow T(M)$ を the canonical inclusoin とすると次が正しい.

Lemma 2.2.1. A を *an R-algebra* (ここでは $A\ni 1$ *a ring* で $1\neq 0$; ${}^{\exists}f:R\to A$ *an unitary ring homom*, $\mathrm{Im}\,f\subseteq\mathrm{C}(A)$ とする.) としよう. もし $j:M\to A$ *an R-linear map* が与えられれば

$$\begin{tikzcd}{}^{\exists 1}\varphi:\ T(M) \arrow[rr] & & A\quad an\ R-algebra\ map \\ s,t & M \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "j"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}.$$

Proof. $^\forall n > 0$, $M \times M \times \cdots \times M \to A$ s,t $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto j(x_1) \cdot j(x_2) \cdots j(x_n)$ は a multi R-linear map である．よって $^{\exists 1}\sigma_n : T_n(M) \to A$ をうる．$\varphi = \sum_{n \geq 0}$ とおくと φ は an R-linear map で $\varphi(x) = j(x)$ for $^\forall x \in M$. 又 φ は an R-algebra map になる．($\sigma_0 = f$, $\sigma_1 = j$) 一意性はやさしい． □

次に $^\forall n \in \mathbb{Z}$ について

$$\bigwedge^n M = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ R & (n = 0) \\ M & (n = 1) \\ T_n(M)/I_n(M) & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$where\ I_n(M) = the\ R - submodule\ of\ T_n(M)\ generated\ by$$

$$\{x_1 \otimes_R x_2 \otimes_R \cdots \otimes_R x_n | x_i \in M,\ x_i = x_j\ for\ some\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

すると $^\forall n, m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^n M \otimes_R \bigwedge^m M \arrow[r, "^{\exists 1}\sigma_{n,m}"] & \bigwedge^{n+m} M \\ T_n(M) \otimes_R T_m(M) \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & T_{n+m}(M) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

である．

(∵) $\mathrm{Ker}\,\tau$ は $x \otimes_R y$ $(x \in I_n(M),\ y \in T_m(M))$, $x \otimes_R y$ $(x \in T_n(M),\ y \in I_m(M))$ で生成される．

この $\sigma_{n,m}$ を用いて

$$\bigwedge M := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bigwedge^n M$$

を a graded R-algebra とみる．そして

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n := \overline{x_1 \otimes_R x_2 \otimes_R \cdots \otimes_R x_n} \qquad in\ \bigwedge^n M$$

とかく．ただ簡単に $x_1 \cdots x_n$ とかくこともある．$j : M \to \bigwedge M$ the canonical map とすると

Lemma 2.2.2. $^\forall x \in M$, $i(x)^2 = 0$ *in* $\bigwedge M$.

Proof. $^\forall x \in M$, $i(x)^2 = x \wedge x = 0$. □

Proposition 2.2.3. A を *an* R*-algebra* とし $j : M \to A$ *an* R*-linear map* とする．もし $j(x)^2 = 0$ $^\forall x \in M$ をみたせば

$$\begin{tikzcd} ^{\exists 1}\varphi :\ \bigwedge M \arrow[rr] & & A \quad an\ R - algebra\ map \\ s,t & M \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "j"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

.

Proof.

$$\begin{tikzcd} {}^{\exists 1}\psi:\ T(M) \arrow[rr] & & A \quad an\ R-algebra\ map \\ & M \arrow[ul, "i", "s,t"'] \arrow[ur, "j"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

であって $\varepsilon : T(M) \to \bigwedge M$ とおくと $\operatorname{Ker}\varepsilon$ は $\operatorname{Ker}\varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n(M)$ である. $n{\geq}2$ で $x{\in}I_n(M)$ ならば

$$x = \sum c x_1 \otimes_R \cdots \otimes_R y \otimes_R \cdots \otimes_R y \otimes_R \cdots \otimes_R x_n$$

$a, b{\in}M$ について $0 = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = ab + ba$ をみて $j(a) \cdot j(y) = -j(y) \cdot j(x)$ をうる.
$\therefore \psi(x) = 0$. 一意性は明らかであろう. □

Corollary 2.2.4. *${}^{\forall}M, N{\in}R-\mathrm{mod}$, $\bigwedge(M \oplus N) \cong \bigwedge M \otimes_R \bigwedge N$ as graded R-algebra.*

Proof. $M \oplus N \to \bigwedge M \otimes_R \bigwedge N$, $(x, y) \mapsto (x \otimes_R 1) \otimes_R (1 \otimes_R y)$ とすると

$$\begin{aligned} & (x \otimes_R 1 + 1 \otimes_R y)(x \otimes_R 1 + 1 \otimes_R y) \\ = \ & (x \otimes_R 1)(x \otimes_R 1) + (x \otimes_R 1)(1 \otimes_R y) + (1 \otimes_R y)(x \otimes_R 1) + (1 \otimes_R y)(1 \otimes_R y) \\ = \ & x^2 \otimes_R 1 + [-(x \otimes_R y)] + [x \otimes_R y] + 1 \otimes_R y^2 = 0. \end{aligned}$$

つまり $\tau : \bigwedge N \otimes_R \bigwedge M \to \bigwedge M \otimes_R \bigwedge N$, $x \otimes_R y \mapsto (-1)^{pq}(y \otimes_R x)$ where $p, q{\in}\mathbb{Z}$, $x{\in}\bigwedge^p N$, $y{\in}\bigwedge^q M$ とすると

$$\begin{aligned} \left(\bigwedge M \otimes_R \bigwedge N\right) \otimes_R \left(\bigwedge M \otimes_R \bigwedge N\right) & \xrightarrow{\sim} \bigwedge M \otimes_R \left(\bigwedge N \otimes_R \bigwedge M\right) \otimes_R \bigwedge N \\ & \xrightarrow{\tau} \bigwedge M \otimes_R \left(\bigwedge M \otimes_R \bigwedge N\right) \otimes_R \bigwedge N \\ & \to \bigwedge M \otimes_R \bigwedge N. \end{aligned}$$

をうる. 一方で

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] & M \oplus N \\ & N \arrow[u, "i_N"'] \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \bigwedge M \arrow[r] & \bigwedge(M \oplus N) \\ & \bigwedge N \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

よって ${}^{\exists}a\ map : \bigwedge M \otimes_R \bigwedge N \longrightarrow \bigwedge(M \oplus N)$. □

Corollary 2.2.5. *${}^{\forall}M, N{\in}R-\mathrm{mod}$, ${}^{\forall}n{\in}\mathbb{Z}$, $\bigwedge^n(M \oplus N) \cong \sum_{i+j=n} \bigwedge^i M \otimes_R \bigwedge^j N$ in $R-\mathrm{mod}$.*

さてそこで F を f,g free R-module, $\operatorname{rank} F = n > 0$ として $\{T_1, \cdots, T_n\}$ を F の R-free bases として固定する. このとき $\bigwedge := \bigwedge F$ とおくと

Lemma 2.2.6. *$\bigwedge_p$ は f,g free R-module で, $0{\leq}p{\leq}n$ ならば $\operatorname{rank} \bigwedge_p = \binom{n}{p}$ である. $p < 0$ or $n < p$ ならば $\bigwedge_p = (0)$ となる.*

Proof. $p<0$ なら $\bigwedge_p=(0)$, $p=1$ なら $\bigwedge_p=F$, $n<p$ なら $\bigwedge_p$ は $T_{i_1}\wedge T_{i_2}\wedge\cdots T_{i_p}$ $(i_\alpha\in\{1,2,\cdots,n\})$ で生成されるので $\bigwedge_p=(0)$. よって $2\leq p\leq n$ としてよい. $F=R\cdot T_1\oplus\sum_{i=2}^{n}R\cdot T_i$ とすると

$$\bigwedge^p F\cong\sum_{i+j=p}\bigwedge^i R\cdot T_1\otimes_R\bigwedge^j\sum_{k=2}^{n}R\cdot T_k.$$

n についての induction を用いることにして $G=\sum_{k=2}^{n}R\cdot T_k$ とすると $\bigwedge R\cdot T_1=R+R\cdot T_1$ であったから

$$\bigwedge^p F\cong\bigwedge^{p-1}G+\bigwedge^p G.$$

$\therefore\bigwedge_p$ は free で $rank=\begin{pmatrix}n-1\\p-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n-1\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\\p\end{pmatrix}$. 生成元として

$$T_{i_1}\cdot T_{i_2}\cdots T_{i_p}\qquad(1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n)$$

をとれるから free bases となっていることがいえる. □

Proposition 2.2.7. $^\forall a_1,\cdots,a_n\in R$ に対して

$$^\exists\partial:\bigwedge\to\bigwedge(-1)\ \ a\ homomorphism\ of\ graded\ R-modules\ s,t\ \partial^2=0,\ and\ \partial T_i=a_i.$$

この *complex* を *the Koszul complex of* R *generated by* $a_1,\cdots,a_n$ という.

$^\forall M\in R-\mathrm{mod}$ について $\bigwedge\otimes_R M=\mathrm{K}.(a_1,\cdots,a_n)$ をあわせて考える方が好ましい. ただしこれは後にふれることにしておく. 証明は全く同じである.

Proof. $^\forall p\in\mathbb{Z}$, $\partial:\bigwedge_p\to\bigwedge_{p-1}$ を

$$\begin{cases}\partial=0 & p\leq 0\ or\ n+1<p\\ \partial T_i=a_i\ \ ^\forall i & p=1\\ \partial T_I=\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+1}a_{i_\alpha}T_{I\setminus\{i_\alpha\}} & 2\leq p\leq n\end{cases}$$

とする. これより

$$\cdots\to 0\to\bigwedge_n\xrightarrow{\partial_n}\bigwedge_{n-1}\to\cdots\xrightarrow{\partial_2}\bigwedge_1\xrightarrow{\partial_1}\bigwedge_0\to 0\to\cdots$$

をうるが, $\partial^2=0$ を check すると $2\leq p\leq n$ として $\partial_{p-1}\partial_p$ を見るに

$$\begin{aligned}&\partial(\partial T_I)\\ =&\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+1}a_{i_\alpha}\partial(T_{i_1}\cdots\widehat{T_{i_\alpha}}\cdots T_{i_p})\\ =&\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+1}a_{i_\alpha}\left[\sum_{\alpha<\beta}(-1)^{\beta+1}a_{i_\beta}T_{i_1}\cdots\widehat{T_{i_\beta}}\cdots\widehat{T_{i_\alpha}}\cdots T_{i_p}+\sum_{\alpha>\beta}(-1)^{\beta+1}a_{i_\beta}T_{i_1}\cdots\widehat{T_{i_\alpha}}\cdots\widehat{T_{i_\beta}}\cdots T_{i_p}\right]\\ =&\ 0.\end{aligned}$$

□

$\mathrm{K}.(a_1, \cdots, a_n; R)$ の基本的な性質を以下に述べよう.
$\mathrm{H}. = \mathrm{H}.(\mathrm{K}.(a_1, \cdots, a_n; R))$ とする. $\mathfrak{a} = (a_1, \cdots, a_n)R$ とせよ.

Lemma 2.2.8. $\mathfrak{a}\,\mathrm{H} = (0)$ である. とくに $\mathfrak{a} = R$ なら $\mathrm{K}.$ は *exact* である.

Proof. $\mathrm{H}_0 = R/\mathfrak{a}$ であるから $p = 0$ で正しい.
$p = n$ ならば $\mathrm{K}_n \to \mathrm{K}_{n-1}$, $T_1 \cdots T_n \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i T_1 \cdots \widehat{T_i} \cdots T_n$ より $\mathrm{H}_n = (0) \underset{R}{:} \mathfrak{a}$ である.
$0 < p < n$ としてよい. ${}^\forall z \in Z_p$ をとり $z = \displaystyle\sum_I c_I T_I$ とかくと

$$0 = \sum_I c_I \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+1} a_{i_\alpha} T_{I \setminus \{i_\alpha\}} \right\}.$$

$1 \le m \le n$ をとり $T_m z \in \mathrm{K}_{p+1}$ をみる. $\partial(T_m z)$ を調べるとよいはず.
そこで一般的に $0 \le p \le n$, $z \in \mathrm{K}_p$, $1 \le m \le n$ として

$$\partial(T_m z) = a_m z - T_m \partial(z)$$

をたしかめよう. $p = 0$ なら $z \in R$ で ∂ は R-linear map より $\partial(T_m z) = z\partial(T_m) = z a_m$.
$1 \le p \le n$ としてよい. $z = T_{i_1} \cdots T_{i_p}$ where $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ として十分.
$m \in I$ とする. $T_m z = 0$ より $z a_m = T_m \partial(z)$ を示す.

$$T_m \partial(z) = \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+1} T_m T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\alpha}} \cdots T_{i_p} = (-1)^{m+1} a_m T_m T_{i_1} \cdots \widehat{T_m} \cdots T_{i_p} = a_m T_{i_1} \cdots T_{i_p} = a_m z.$$

$m \notin I$ とする. $1 \le i_1 < \cdots < i_\alpha < i_m < i_{\alpha+1} < \cdots < i_p \le n$ であるとせよ.
このとき $T_m z = T_m T_{i_1} \cdots T_{i_p} = (-1)^\alpha T_{i_1} \cdots T_{i_\alpha} T_m T_{\alpha+1} \cdots T_{i_p}$ となるので

$$\begin{aligned}
\partial(T_m z) &= (-1)^\alpha \sum_{\beta=1}^{\alpha} (-1)^{\beta+1} a_{i_\beta} T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\beta}} \cdots T_{i_\alpha} T_m T_{i_{\alpha+1}} \cdots T_{i_p} \\
&\qquad + (-1)^\alpha (-1)^{\alpha+2} a_m T_{i_1} \cdots T_{i_p} \\
&\qquad + \sum_{\beta=\alpha+1}^{\alpha} (-1)^{\beta+1} a_{i_\beta} T_{i_1} \cdots T_{i_\alpha} T_m T_{i_{\alpha+1}} \cdots \widehat{T_{i_\beta}} \cdots T_{i_p} \\
&= a_m z - T_m \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} (-1)^{\beta+1} a_{i_\beta} T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\beta}} \cdots T_{i_\alpha} T_{i_{\alpha+1}} \cdots T_{i_p} \right) \\
&\qquad - T_m \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} (-1)^{\beta+1} a_{i_\beta} T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\beta}} \cdots T_{i_\alpha} T_{i_{\alpha+1}} \cdots T_{i_p} \right) \\
&= a_m z - T_m \partial(z).
\end{aligned}$$

とくに $z \in \mathrm{Z}_p \Rightarrow a_m z = \partial(T_m z)$ となる. □

$n \geq 2$ のとき $\mathrm{K} = \mathrm{K}.(a_1, \cdots, a_n; R)$, $\mathrm{L} = \mathrm{K}.(a_2, \cdots, a_n; R)$ とおく．そして $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{K}$ とみなす．
$\varphi : \mathrm{L} \to \mathrm{K}$ を

$$\varphi(T_I) = \begin{cases} T_{I \setminus \{n\}} & n \in I \\ 0 & n \notin I \end{cases}$$

であると定めると ${}^\forall p \in \mathbb{Z}$ について

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L}_p \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{K}_p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{L}_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L}_{p-1} \arrow[r, "i"] & \mathrm{K}_{p-1} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{L}_{p-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

となる．従って a long exact sequence

$$\cdots \to \mathrm{H}_p(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}_p(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}_{p-1}(\mathrm{L}) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}_{p-1}(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}_{p-1}(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}_{p-2}(\mathrm{L}) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}_{p-2}(\mathrm{L}) \to \cdots$$

in R-mod をうる．ここで注目すべきは $\mathrm{H}_{p-1}(\mathrm{L}) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}_{p-1}(\mathrm{L})$ が $(-1)^{p+1}a_n$ の multiplication で与えられることにある．

Proof.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L}_p \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{K}_p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{L}_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L}_{p-1} \arrow[r, "i"] & \mathrm{K}_{p-1} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{L}_{p-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

$z \in \mathrm{L}_{p-1}$ が cycle であるとして $z = \sum_I c_I T_I$ と書く．$\therefore$ $\mathrm{K}_p \ni^\exists \sum_I c_I T_I \cdot T_n \mapsto z$. よって

$$\begin{aligned}
\sum_I c_I T_I \cdot T_n \quad &\overset{\partial}{\mapsto} \quad \sum_I c_I \left(\sum_{\alpha=1}^{p-1} (-1)^{\alpha+1} a_{i_\alpha} T_{I \setminus \{i_\alpha\}} T_n + (-1)^{p+1} a_n T_I \right) \\
&= \quad (-1)^{p+1} a_n \sum_I c_I T_I + \left[\sum_I c_I \left(\sum_{\alpha=1}^{p-1} (-1)^{\alpha+1} a_{i_\alpha} T_{I \setminus \{i_\alpha\}} \right) \right] T_n \\
&= \quad (-1)^{p+1} a_n z.
\end{aligned}$$

□

よって

Corollary 2.2.9. ${}^\forall p \in \mathbb{Z}$, ${}^\exists$*exact;*

$$0 \longrightarrow \frac{\mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_{n-1}; R)}{a_n \mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_{n-1}; R)} \longrightarrow \mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_n; R) \longrightarrow \mathrm{H}_{p-1}(a_1, \cdots, a_{n-1}; R) \longrightarrow 0.$$

Theorem 2.2.10.

(1) $a_1, \cdots, a_n$ が連続的に *NZD* である. $\Rightarrow$ $\mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_n; R) = (0)$ *for* $^\forall p \in \mathbb{Z}$.
(2) R は *Noetherian* で $a_1, \cdots, a_n \in \mathrm{J}(R)$. $\Rightarrow$ (1) は逆も正しい.

Proof. (1) $(n=1)$ $0 \to R \cdot T_1 \cdot R$, $T_1 \mapsto a_1$ をみるに ∂ は単射である. $n > 1$ で $n-1$ まで正しいとすると, $p > 0$ では $\mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_{n-1}; R) = (0)$. $\therefore \mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_n; R) = (0)$ if $p > 1$. $p = 1$ のときは仮定による.
(2) $n = 1$ なら $0 \to R \cdot T_1 \to R$ exact より a_1 は an $R-nzd$. $n > 1$ なら induction と中山の補題による. □

Remark 2.2.11.
(1) $\varphi : R \to S$ を *a homomorphism of rings* とすると

$$\mathrm{H}_p(\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n); S) \cong \mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_{n-1}; R) \otimes_R S \quad \textit{as complex in } S-\mathrm{mod}$$

である.
(2) $\mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_n; R)$ は $a_1, \cdots, a_n$ の正則行列によるとりかえでも同型である.
(3) $\mathrm{H}_p(a_1, \cdots, a_n; R)$ は *self-dual* である.

すぐできる. 但し $\bigwedge M$ の universal property を用いるほうがよいかもしれない.

Corollary 2.2.12. $(R, \mathfrak{m})$ が *a regular local ring* で $d = \dim R > 0$ のとき $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_d)$ とすると $\mathrm{K}.(x_1, \cdots, x_d; R)$ は $R/\mathfrak{m}$ の *a min free resolution* を定める. とくに

$$\dim_{R/\mathfrak{m}} \mathrm{Ext}_R^d(R/\mathfrak{m}, R) = 1; \quad \mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{m}) = \binom{d}{i} \quad 0 \le {}^\forall i \le d$$

である.

2.3　$\mathrm{Ass}_R\, M$

$^\forall M \in R-\mathrm{mod}$ に対して

$$\mathrm{Ass}_R\, M := \left\{ Q \in \mathrm{Spec}\, R \,|\, ^\exists 0 \to R/Q \to M \textit{ exact in } R-\mathrm{mod} \right\}$$

とおく. もちろん $Q \in \mathrm{Spec}\, R$ については

$$Q \in \mathrm{Ass}_R\, M \Leftrightarrow (0) \underset{R}{:} x = Q \textit{ for } {}^\exists x \in M$$

となる.

Lemma 2.3.1. $^\forall Q \in \mathrm{Spec}\, R$, $(0) \neq {}^\forall M \subseteq R/Q$ *an R-submodule of* R/Q について $\mathrm{Ass}_R\, M = \{Q\}$ である.

Proof. $0 \neq {}^\forall x \in M$ をとると $a \in R$ について, $ax = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *in* $R/Q \Leftrightarrow a \in Q$ による. □

Proposition 2.3.2. $(0) \neq M \in R-\mathrm{mod}$ をとり $\mathcal{S} = \{(0) \underset{R}{:} x \,|\, 0 \neq x \in M\}$ とおく. このとき, $I \in \mathcal{S}$ *maximal* $\Rightarrow$ $I \in \mathrm{Spec}\, R$ である.

Proof. $I = (0) \underset{R}{:} x$, $0 \neq x \in M$ とかくと $I \subsetneq R$ an ideal of R であって $a, b \in R$ について $ab \in I$ であるときもし $a, b \notin I$ ならば $(0) \underset{R}{:} ax \supsetneq (0) \underset{R}{:} x = I$ である. $\because ax \neq 0$, $b \in (0) \underset{R}{:} ax$. □

Corollary 2.3.3. R を *a Noetherian* とせよ. $M \in R - \mathrm{mod}$ について

$$M \neq (0). \Leftrightarrow \mathrm{Ass}_R M \neq \emptyset.$$

Proof. $\mathrm{Ass}_R M = \emptyset$ とする. もし $M \neq (0)$ なら $\mathcal{S}$ 内に極大元があってそれを I とすると $I \in \mathrm{Ass}_R M \neq \emptyset$. □

Corollary 2.3.4. R が *Noetherian* のとき $(0) \neq {}^{\forall} M \in R - \mathrm{mod}$ について

$$a \in R \text{ が } an\ M - nzd. \Leftrightarrow a \notin \bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}_R M} Q.$$

Proof. ($\Rightarrow$) $a \in Q$ とすると $Q = (0) \underset{R}{:} x$ なる $0 \neq {}^{\exists} x \in M$. $\therefore ax = 0$, $x = 0$ となり矛盾.
($\Leftarrow$) $N = (0) \underset{M}{:} a$ とおくと, $\mathrm{Ass}_R N = \emptyset$ となる. これは, もし $\mathrm{Ass}_R N \neq \emptyset$ とすると ${}^{\exists} Q \in \mathrm{Ass}_R N$. もちろん $0 \neq {}^{\exists} n \in N$ s,t $Q = (0) \underset{R}{:} n$. $\therefore an = 0$, $a \in Q$ となるが一方で $0 \to R/Q \hookrightarrow N \subseteq M$ より $Q \in \mathrm{Ass}_R M$ となり矛盾. □

Corollary 2.3.5. R が *Noetherian* のとき

$$\bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}\, R} Q = \{a \in R \mid a \text{ は } an\ R - nzd\}$$

である.

Lemma 2.3.6. $0 \to L \to M \to N \to 0$ *exact in* $R - \mathrm{mod}$ ならば

$$\mathrm{Ass}_R L \subseteq \mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Ass}_R L \cup \mathrm{Ass}_R N.$$

Proof. $\mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Ass}_R L \cup \mathrm{Ass}_R N$ を示す. もちろん $\mathrm{Ass}_R M \neq \emptyset$ として十分. ${}^{\forall} Q \in \mathrm{Ass}_R M$ をとると

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & & R/Q \arrow[u, hook, "\alpha"'] & & \end{tikzcd}.$$

もし $\mathrm{Im}\, \alpha \cap L \neq (0)$ ならば $L \supseteq \mathrm{Im}\, \alpha \cap L \subseteq \mathrm{Im}\, \alpha \cong R/Q$ より $Q \in \mathrm{Ass}_R L$ をうる. $(0) = \mathrm{Im}\, \alpha \cap L$ ならば $0 \to R/Q \xrightarrow{g\alpha} N$ exact より $Q \in \mathrm{Ass}_R N$ をうる. □

Corollary 2.3.7. $\{M_i\}$ ($M_i \in R - \mathrm{mod}$ for ${}^{\forall} i \in \underset{a\ set}{I} \neq \emptyset$) について

$$\mathrm{Ass}_R \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}_R M.$$

Lemma 2.3.8. $M \in R-\mathrm{mod}$ をとり $\Phi \subseteq \mathrm{Ass}_R M$ とせよ．このとき ${}^{\exists}exact;\quad 0 \to L \to M \to N \to 0$ *where* $\mathrm{Ass}_R N = \Phi$, $\mathrm{Ass}_R L = \mathrm{Ass}_R M \backslash \Phi$.

Proof. $\mathcal{S} = \{X | X \subseteq M \ an\ R-submodule\ of\ M\ s,t\ \ \mathrm{Ass}_R X \subseteq \Psi\}$ where $\Psi := \mathrm{Ass}_R M \backslash \Phi$ とおく．このとき $\mathcal{S} \neq \emptyset$; $\emptyset \neq {}^{\forall}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ a chain, $Y := \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$ とおくと $Y \subseteq M$ an R-submodule of M であって $\mathrm{Ass}_R Y = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Ass}_R X$．よって ${}^{\exists}L \in \mathcal{S}$ max elem. このとき $\mathrm{Ass}_R M/L \subseteq \Phi$ である．実際, $Q \in \mathrm{Ass}_R M/L$ であれば ${}^{\exists}exact;\ 0 \to R/Q \xrightarrow{\alpha} M/L$, $\mathrm{Im}\,\alpha = F/L$ となる $F \subseteq M$ an R-submodule of M, $L \subsetneq F$ をとると $0 \to L \to F \to R/Q \to 0$ exact より $\mathrm{Ass}_R F \subseteq \mathrm{Ass}_R L \cup \{Q\}$ である．もし $Q \notin \Phi$ であれば $Q \in \Psi$. $\therefore \mathrm{Ass}_R F \subseteq \Psi$ となり L の極大性に反する．$\therefore \mathrm{Ass}_R L \subseteq \Psi$ であるが $\mathrm{Ass}_R M/L \subseteq \Phi$ をあわせると $\mathrm{Ass}_R L = \Psi$, $\mathrm{Ass}_R M/L = \Phi$ をうる． □

しばらくの間, $S \subset R$ を R の multi closed, $M \in R-\mathrm{mod}$ とする．

Proposition 2.3.9.

(1) $Q \in \mathrm{Spec}\,R$ について $Q \cap S = \emptyset$ でかつ $Q \in \mathrm{Ass}_R M$ ならば $S^{-1}Q \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}M$.
(2) $Q \in \mathrm{Spec}\,R$ で *f,g* であって $Q \cap S = \emptyset$ とする．$S^{-1}Q \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}M$ ならば $Q \in \mathrm{Ass}_R M$.

Proof. (1) $0 \to R/Q \to M$ exact による．
(2) $S^{-1}Q = (0) : \dfrac{x}{1}$ for ${}^{\exists}x \in M$. $\therefore {}^{\forall}f \in Q$, $\dfrac{d}{1} \cdot \dfrac{x}{1} = 0$ より ${}^{\exists}s \in S$ s,t $s[Qx] = (0)$ in M. もし $a \in R$ が $a(sx) = 0$ $\Rightarrow \dfrac{sa}{1} \in S^{-1}Q$ より $a \in Q$. $a \in Q$ ならば $(sa)x = 0$ より $a(sx) = 0$. $\therefore Q = (0) \underset{R}{:} sx$ より $Q \in \mathrm{Ass}_R M$. □

よって次をうる．

Proposition 2.3.10. R が *Noetherian* であれば ${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$ について

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}M = \{S^{-1}Q | Q \in \mathrm{Ass}_R M,\ Q \cap S = \emptyset\}.$$

Proposition 2.3.11. R が *Noetherian* のときは ${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$ について ${}^{\exists 1}L \subseteq M$ *s,t*

$$\mathrm{Ass}_R L = \mathrm{Ass}_R M \backslash \mathrm{Spec}(R,S),\quad \mathrm{Ass}_R M/L = \mathrm{Ass}_R M \cap \mathrm{Spec}(R,S),$$

where $\mathrm{Spec}(R,S) := \{Q \in \mathrm{Spec}\,R | Q \cap S = \emptyset\}$.

Proof. $\Phi = \mathrm{Ass}_R M \cap \mathrm{Spec}(R,S)$ とする．すると ${}^{\exists}L \subseteq M$ s,t $\mathrm{Ass}_R L = \mathrm{Ass}_R M \backslash \Phi$. このような L をみるに $\mathrm{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}L = \{S^{-1}Q | Q \in \mathrm{Ass}_R L,\ Q \cap S = \emptyset\}$ より $\mathrm{Ass}_R L \neq \emptyset$. $\therefore S^{-1}L \neq (0)$, つまり $L \subseteq \mathrm{Ker}\left(M \to S^{-1}M,\ x \mapsto \frac{x}{1}\right)$. $x \in M$ についてもし $sx = 0$ ${}^{\exists}s \in S$ なら, $sx \in L$; $\overline{x} \in M/L$ をみるに $s \in Q$ ${}^{\forall}Q \in \mathrm{Ass}_R M/L$ であるから s は an M/L-nzd. よって $x \in L$. $\therefore L = \mathrm{Ker}(M \to S^{-1}M)$. □

Lemma 2.3.12. $M \in R-\mathrm{mod}$ とすると

(1) $\mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Supp}_R M$.
(2) R が *Noetherian* なら $Q \in \mathrm{Spec}\,R$ であるとき, $Q \in \mathrm{Supp}_R M. \Leftrightarrow Q \supseteq P$ ${}^{\exists}P \in \mathrm{Ass}_R M$.

よって R が *Noetherian* であれば $\mathrm{Supp}_R M$ と $\mathrm{Ass}_R M$ は *min elem* を共有する．

Proof. (1) は自明. (2),($\Rightarrow$) のみを示す. $M_Q \neq (0)$ より $\mathrm{Ass}_{R_Q} M_Q \neq \emptyset$. $\therefore P \in \mathrm{Ass}_{R_Q} M_Q$ なら $\mathfrak{p} := P \cap R$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R M$ で $\mathfrak{p} \subseteq Q$. □

Theorem 2.3.13. *R が Noetherian で $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ なら*

$$^{\exists}M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = (0) \quad (n > 0;\ M_i \text{は } M \text{ の } R-submodule)\ s,t$$

$$0 \leq {}^{\forall}i \leq n-1\ ;\quad \frac{M_i}{M_{i+1}} \cong \frac{R}{Q_i} \quad {}^{\exists}Q_i \in \mathrm{Spec}\, R.$$

Proof. $\mathcal{S} = \{L | L$ は M の $R-submodule$ で $L = (0)$ か又は, $L \neq (0)$ であって上のような *chain* をもつ $\}$ とすると $^{\exists}L \in \mathcal{S}$ max elem. $L \neq M$ なら $^{\exists}Q \in \mathrm{Ass}_R M/L$; $0 \to R/Q \xrightarrow{\alpha} M/L$ とし $\mathrm{Im}\,\alpha = F/L$; $L \subsetneq F \subseteq M$ をとると $F \in \mathcal{S}$. $\therefore L = M$. □

Corollary 2.3.14. *R a Noetherian. $\Rightarrow$ $^{\forall}M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $|\mathrm{Ass}_R M| < \infty$.*

Proof. $M \neq (0)$ としてよいので上のような chain をとると

$$\mathrm{Ass}_R M \subseteq \{Q_0, \cdots .Q_{n-1}\} \subseteq \mathrm{Supp}_R M$$

となる. □

Lemma 2.3.15. *R は Noetherian とし $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $N \in R-\mathrm{mod}$ とすると*

$$\mathrm{Ass}_R \mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R N$$

である.

Proof. $R^n \to M \to 0$ より $0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(R^n, N) \cong N^n$. $\therefore Ass_R \mathrm{Hom}_R(M,N) \subseteq \mathrm{Ass}_R N$.
$Q \in Ass_R \mathrm{Hom}_R(M,N)$ なら $\mathrm{Hom}_{R_Q}(M_Q, N_Q) \neq (0)$ より $Q \in \mathrm{Supp}_R M$. $\therefore (\subseteq)$ をうる.
$Q \in \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R N$ とすると $(0) \neq \mathrm{Hom}_R(M, R/Q) \ni {}^{\exists}\alpha \neq 0$, $^{\exists}exact$;　$0 \to R/Q \xrightarrow{j} N$.
$\therefore j\alpha : M \to R/Q \to N$ とすると $a \in R$ について, $a \in Q \Leftrightarrow af = 0$ である. □

Definition 15. *R は Noetherian, $M \in R-\mathrm{mod}$, $L \subseteq M$ an R-submodule of M のとき*

$$L \text{ が } primary\ in\ M \text{ である}. \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} |\mathrm{Ass}_R M/L| = 1.$$

と定める. もちろん $L \subsetneq M$ である. $\mathrm{Ass}_R M/L = \{P\}$ を指定するときには L は *P-primary R-submodule of M* であるという.

Lemma 2.3.16. *R は Noetherian, $M \in R-\mathrm{mod}$, のとき次は同値である.*

(1) $|\mathrm{Ass}_R M| = 1$.
(2) $M \neq (0)$ であって $a \in R$ としたとき $\widehat{a} : M \to M$ は単射であるか, 又は $^{\forall}x \in M$, $^{\exists}n > 0$ *s,t* $a^n x = 0$.

Proof. (1)$\Rightarrow$(2) $\{Q\} = \mathrm{Ass}_R M$ とすると, もちろん $M \neq (0)$ である. $a \in R$ について $a \notin Q$ であれば a は an M-nzd である. $a \in Q$ とする. $^{\forall}x \in M$ をとり $N = Rx$ とおくと, $\mathrm{Ass}_R N \subseteq \{Q\}$ である. $x = 0$ なら $n = 1$ で十分. $x \neq 0$ とする. $\mathrm{Ass}_R N = \{Q\}$ より $Q = \sqrt{\mathrm{Ann}_R N}$. $\therefore a^n x = 0$ $^{\exists}n > 0$.
(2)$\Rightarrow$(1) $\mathrm{Ass}_R M \neq \emptyset$ より $^{\exists}Q \in \mathrm{Ass}_R M$ を一つとる. $Q = (0) \underset{R}{:} x$ for $^{\exists}x \in M$. $^{\forall}P \in \mathrm{Ass}_R M$ について $Q \neq P$ ならば $Q \not\subseteq P$ or $Q \not\supseteq P$ である. もし $Q \not\subseteq P$ なら $^{\exists}a \in P \backslash Q$; a は M-zd なので $^{\exists}n > 0$ s,t $a^n y = 0$ for $^{\forall}y \in M$. $\therefore {}^{\exists}\ell > 0$ s,t $a^\ell x = 0$ ならば $a^\ell \in Q$. $\therefore a \in Q$ となり矛盾. □

Remark 2.3.17. R が *Noetherian* で $I \subseteq R$; *an ideal* とする.

$$|\mathrm{Ass}_R R/I| = 1. \Leftrightarrow I \text{ は } \textit{primary ideal} \text{ である.}$$

Lemma 2.3.18. R が *Noetherian,* $M \in R-\mathrm{mod}$ *s,t* $\mathrm{Ass}_R M = \{P\}$ *for some* $P \in \mathrm{Spec}\, R$. $\Rightarrow {}^\forall x \in M$ に対して ${}^\exists n > 0$ *s,t* $P^n x = (0)$.

Exercise 4. 上の補題を証明せよ.

Theorem 2.3.19. R が *Noetherian,* $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $(0) \neq N \subsetneq M$; *an* R*-submodule of* M であるとすると ${}^\exists\{L(Q)\}_{Q \in \mathrm{Ass}_R M/N}$ *where* ${}^\forall Q \in \mathrm{Ass}_R M/N$ に対して $L(Q)$ は Q*-primary* R*-submodule* であって, かつ

$$N = \bigcap_{Q \in \mathrm{Ass}_R M/N} L(Q).$$

Proof. ${}^\forall Q \in \mathrm{Ass}_R M/N$ について ${}^\exists L(Q) \subseteq M$ an R-submodule of M s,t $N \subseteq L(Q)$, $\mathrm{Ass}_R M/L(Q) = \{Q\}$, and $\mathrm{Ass}_R L(Q)/N = \{\mathrm{Ass}_R M/N\} \backslash \{Q\}$. もちろん $L(Q)$ は Q-primary であって $X = \bigcap_{Q \in \mathrm{Ass}_R M/N} L(Q)$ とおくと $N \subseteq X$ は明らか. $X = N$ を示すには ${}^\forall Q \in \mathrm{Ass}_R M/N$, $\mathrm{Ass}_R X/N \subseteq \mathrm{Ass}_R L(Q)/N$ より $\mathrm{Ass}_R X/N \subseteq \bigcap_{Q \in \mathrm{Ass}_R M/N} \mathrm{Ass}_R L(Q)/N = \emptyset$. $\therefore X = N$. □

Lemma 2.3.20. R が *Noetherian,* $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のときは次は同値である.

(1) $\ell_R(M) < \infty$.
(2) $\mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Max}\, R$.
(3) $\mathrm{Supp}_R M \subseteq \mathrm{Max}\, R$.

そして $M \neq (0)$ ならば次を追加できる.

(4) $\dim_R M = 0$. ($\dim_R M = \mathrm{Supp}_R M$ 内の *chain* の長さの sup である.)

Proof. (1)⇒(2) ${}^\forall Q \in \mathrm{Ass}_R M$, $0 \to R/Q \to M$. よって $\ell_R(M) < \infty$ より $Q \in \mathrm{Max}\, R$.
(2)⇒(3) ${}^\forall Q \in \mathrm{Supp}_R M$, $Q \supseteq P$ ${}^\exists P \in \mathrm{Ass}_R M$. $\therefore Q = P \in \mathrm{Max}\, R$.
(3)⇔(4) 定義による.
(3)⇒(1) $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = (0)$ を $M_i/M_{i+1} \cong R/Q_i$ にとると $Q_i \in \mathrm{Supp}_R M$.
$\therefore \ell_R(M) < \infty$. □

$M \in R-\mathrm{mod}$ について $\mathrm{Supp}_R M := \{Q \in \mathrm{Spec}\, R | M_Q \neq (0)\}$ とおく. $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ なら $\mathrm{Supp}_R M = \mathrm{V}(I)$ where $I = \mathrm{Ann}_R M$ である. 従って

Lemma 2.3.21. ${}^\forall M, N \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $\mathrm{Supp}_R(M \otimes_R N) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Supp}_R N$.

Proof. $Q \in \mathrm{Spec}\, R$, $R_Q \otimes_R (M \otimes_R N) \cong M_Q \otimes_{R_Q} N_Q$ as R_Q-modules である.
$(R, \mathfrak{m})$ local, $M, N \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のとき $M \otimes_R N = (0)$, $M \neq (0) \Rightarrow M \to M/\mathfrak{m}M \cong k^\alpha \to 0$ $(\alpha > 0)$.
よって

$$\begin{array}{ccccc} (0) = M \otimes_R N & \to & k \otimes_R N & \to & 0 \\ & & \| \wr & & . \\ & & N/\mathfrak{m}N & & \end{array}$$

$\therefore N = (0)$. $\square$

Remark 2.3.22. $M \in R-\mathrm{mod}$ のとき $Q \in \mathrm{Supp}_R M$. $\Rightarrow$ $\mathrm{V}(Q) \subseteq \mathrm{Supp}_R M$.

Lemma 2.3.23. *$S \subseteq R$ 乗法系, $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とすると $\mathrm{Ann}_{S^{-1}R} S^{-1}M = S^{-1} \mathrm{Ann}_R M$ in $S^{-1}R$.*

Proof. $I = \mathrm{Ann}_R M$ とおく. $\dfrac{a}{s} \in \mathrm{Ann}_{S^{-1}R} S^{-1}M \Rightarrow {}^{\forall}x \in M$, $\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{ux}{u} = 0$ for ${}^{\forall}u \in S$. $\therefore t(aux) = 0$ for some $t \in S$. $\therefore {}^{\exists}s_1 \in S$ s,t $(s_1 a)M = (0)$. $\therefore \dfrac{a}{s} = \dfrac{s_1 a}{s_1 s} \in I \cdot S^{-1}R$. $\square$

2.4　正則列

${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$ に対して $\mathrm{Supp}_R M = \{Q \in \mathrm{Spec}\, R | M_Q \neq (0)\}$ であり $M \neq (0)$ に対して $\dim_R M = \sup\{n \geq 0 | {}^{\exists}Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n \ in\ \mathrm{Supp}_R M\}$ と定める. もし $M = (0)$ であればそのときは $\dim_R M = -\infty$ とする. 一般に $P, Q \in \mathrm{Spec}\, R$ について $P \subseteq Q$ で $P \in \mathrm{Supp}_R M \Rightarrow Q \in \mathrm{Supp}_R M$ である. また $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ なら $\mathrm{Supp}_R M = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_R M)$ である.

Definition 16. $(R, \mathfrak{m})$ が *Noeth local,* $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のときは $n = \dim_R M$ とおくと

$${}^{\exists}f_1, \cdots, f_n \in \mathfrak{m}\ s,t\ \ell_R(M/(f_1, \cdots, f_n)M) < \infty.$$

このような $\{f_1, \cdots, f_n\}$ を M の *an sop* という.

$d = \dim R$ とおく. $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $n = \dim_R M$ とすると $0 \leq n \leq d$ である.

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}_R M &:= \{Q \in \mathrm{Supp}_R M | Q \text{ は } minimal\ in\ \mathrm{Supp}_R M\} \\ \mathrm{Assh}_R M &:= \{Q \in \mathrm{Supp}_R M | \dim R/Q = \dim_R M\} \end{aligned}$$

とおく. もちろん $\mathrm{Supp}_R M$ 内には ${}^{\exists}Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$ であるから $Q_0 \in \mathrm{Assh}_R M \neq \emptyset$ である. ${}^{\forall}Q \in \mathrm{Assh}_R M$ は $\mathrm{Supp}_R M$ の極小元なので $Q \in \mathrm{Ass}_R M$ である.

$$\therefore \quad \emptyset \neq \mathrm{Assh}_R M \subseteq \mathrm{Min}_R M \subseteq \mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Supp}_R M, \quad |\mathrm{Ass}_R M| < \infty.$$

${}^{\forall}f \in \mathfrak{m}$ について $M/fM \neq (0)$ であって, さらに

(1) $n \geq \dim_R M/fM \geq n-1$.
(2) $\dim_R M/fM = n-1 \Leftrightarrow f \notin Q\ for\ {}^{\forall}Q \in \mathrm{Assh}_R M$.

Proof. (1) $M \to M/fM \to 0$ より $\mathrm{Supp}_R M/fM \subseteq \mathrm{Supp}_R M$. $\therefore \dim_R M \leq n$. もし $\dim_R M/fM \leq n-2$ とすると $\mathrm{Supp}_R M/fM = \mathrm{V}(f) \cap \mathrm{Supp}_R M$ ($\because$ $Q \in \mathrm{Spec}\, R$ について $Q \in \mathrm{Supp}_R M/fM$ ならば $M_Q/fM_Q \neq (0)$ より $Q \in \mathrm{Supp}_R M$; $\frac{f}{1} \in QR_Q$ より $f \in Q$ 又 $f \in Q$, $Q \in \mathrm{Supp}_R M$ なら $M_Q/fM_Q \neq (0)$ である.) より $I = \mathrm{Ann}_R M$ とおくと $\mathrm{Supp}_R M/fM = \mathrm{V}((f)+I)$. $\therefore \dim R/(f)+I \leq n-2$.
$\therefore n = \dim R/I \leq n-1$ となり矛盾.
(2) $\dim_R M/fM = n-1 \Rightarrow {}^{\forall}Q \in \mathrm{Assh}_R M$, $Q \not\supseteq I+(f)$. $\therefore f \notin Q$.
${}^{\forall}Q \in \mathrm{Assh}_R M$, $f \notin Q \Rightarrow \dim_R M/fM \neq n$. $\square$

さて $I = (0) \underset{R}{:} M$ で $n > 0$ とすると, $\dim R/I = n$ より $\{f_1, \cdots, f_n\}$ を R/I 内で an sop となるようにとると $\mathrm{V}(I + (f_1, \cdots, f_n)) = \{\mathfrak{m}\}$. $\therefore \ell_R(M/I + (f_1, \cdots, f_n)) < \infty$.

Corollary 2.4.1. $(R, \mathfrak{m})$ *Noeth local,* $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $f \in \mathfrak{m}$ のとき

$$\dim_R M/fM = \dim_R M - 1. \Leftrightarrow f \text{ は } M \text{ の } sop \text{ の一部をなす.}$$

Proof. $(\Rightarrow)$ $n = \dim_R M$ とおくと ${}^{\exists}f_1, \cdots, f_n \in \mathfrak{m}$ s,t $\ell_R(M/I + (f_1, \cdots, f_n)) < \infty$.
$(\Leftarrow)$ $f_1 = f, \cdots, f_n$ を M の sop とすると, もし ${}^{\exists}Q \in \mathrm{Assh}_R M$, $f \in Q$ ならば $\dim R/I + (f_2, \cdots, f_n) = 0$ より $n = \dim_R M \leq n - 1$ となり矛盾. □

Corollary 2.4.2. $(R, \mathfrak{m})$ *Noeth local,* $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $f \in \mathfrak{m}$ とするとき,

$$f \text{ が } M - nzd. \Rightarrow \dim_R M/fM = \dim_R M - 1.$$

Definition 17. $M \in R - \mathrm{mod}$, $a_1, \cdots, a_n \in R$ $(n \geq 0)$ のとき

$$a_1, \cdots, a_n \text{ は } an\ M - regular\ sequence \text{ である.}$$
$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$\begin{cases} (1)\ M/(a_1, \cdots, a_n)M \neq (0), \\ (2)\ 1 \leq {}^{\forall}i \leq n,\ 0 \to M/(a_1, \cdots, a_{i-1})M \xrightarrow{\widehat{a_i}} M/(a_1, \cdots, a_{i-1})M \quad exact. \end{cases}$$

但し, $(a_1, \cdots, a_i)M = (0)$ *if* $i = 0$ である. $(R, \mathfrak{m})$ *local* で $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ ならば (1) は $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{m}$ と同値である.

Corollary 2.4.3. R は *Noeth local* で, $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のとき $\mathcal{S} = \{n \geq 0 | {}^{\exists}f_1, \cdots, f_n \in R\ s,t\ an\ M - regular\ sequence\}$ とおくと ${}^{\exists}N \in \mathbb{Z}$ *s,t* ${}^{\forall}n \in \mathcal{S}$, $n \leq N$.

$$\mathrm{depth}_R M := \max \mathcal{S}$$

と定める. もちろん ${}^{\forall}i \in \mathcal{S}$, $\dim_R M \geq i$ であるから $\mathrm{depth}_R M \leq \dim_R M$ である.

Example 2.4.4.
(1) $R = k[X_1, \cdots, X_n]$ なら $\{X_1, \cdots, X_n\}$ は *an M-regular sequence* である.
(2) $(R, \mathfrak{m})$ *RLR.* $\Rightarrow \mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_d)$ となる $\underline{x} = \{x_1, \cdots, x_d\}$ は *an R-regular sequence* をなす.

以下, しばらくは $(R, \mathfrak{m})$ Noeth local, $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とする.

Lemma 2.4.5. $\mathrm{depth}_R M = 0. \Leftrightarrow \mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R M \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq (0)$.

Proof. $(\Rightarrow)$ $\forall f \in \mathfrak{m}$, f は M-zd であるから $\mathfrak{m} \subseteq \displaystyle\bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}_R M} Q$. $\therefore \mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R M$.
$(\Leftarrow)$ ${}^{\forall}f \in \mathfrak{m}$ は M-zd となる. これは $\mathrm{Ass}_R \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M) = \{\mathfrak{m}\} \cap \mathrm{Ass}_R M$ による. □

Theorem 2.4.6. $t = \mathrm{depth}_R M$ とすると

(1) ${}^{\forall}i < t$, $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) = (0)$.

(2) $\mathrm{Ext}^t_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq (0)$.

よって $\operatorname{depth}_R M = \min\left\{i\in\mathbb{Z} \mid \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq (0)\right\}$ をうる.

Proof. $t > 0$ として $t-1$ まで正しいとして十分. $f\in\mathfrak{m}$ を an M-regular element とすると

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\widehat{f}} M \longrightarrow M/fM \longrightarrow 0$$

は exact であって, $\overline{M} := M/fM$ とすると $^\exists$a long exact sequence

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{i-1}_R(R/\mathfrak{m}, \overline{M}) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \xrightarrow{\widehat{f}} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, \overline{M})$$

$$\to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{m}, M) \xrightarrow{\widehat{f}} \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{m}, M) \to \cdots .$$

このとき $\widehat{f} = 0$ なので $^\forall i\in\mathbb{Z}$ に対して

$$0 \to \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, \overline{M}) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{m}, M) \to 0 \quad \textit{exact}$$

をうる. よって $f_1 = f, \cdots, f_t$ を an M-regular sequence とすれば $f_2, \cdots, f_t$ をみて $\operatorname{depth}_R \overline{M} = t-1$ であるから, $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, \overline{M}) = (0)$ for $^\forall i < t-1$, and $\mathrm{Ext}^{t-1}_R(R/\mathfrak{m}, \overline{M}) \neq (0)$ となり

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) = (0) & ^\forall i < t \\ \mathrm{Ext}^t_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq (0) \end{cases}$$

をうる. □

Corollary 2.4.7. $\operatorname{depth}_R M/fM = \operatorname{depth}_R M - 1$ *for* $^\forall f\in\mathfrak{m}$; *an M-regular.*

Corollary 2.4.8. R が正則局所環であれば $\dim R = \operatorname{depth} R$ が成り立つ. 従って正則局所環は *C-M local ring* である.

Definition 18. M が *a Cohen-Macaulay R-module* である. $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\operatorname{depth}_R M = \dim_R M$. そして, とくに R が *R-module* として *a C-M R-module* であるとき R のことを *a C-M local ring* という.

Example 2.4.9.
(1) $\dim_R M = 0$ ならば M は *a C-M R-module* である.
(2) $\dim R = 1$, *domain* は *a C-M local ring* である.

Lemma 2.4.10. $f\in\mathfrak{m}$ は *an M-regular* であるとせよ. このとき M が *a C-M R-module* であることの必要十分条件は M/fM が *a C-M R-module* である.

Lemma 2.4.11. $Q\in \operatorname{Ass}_R M$. $\Rightarrow$ $\dim R/Q \geq \operatorname{depth}_R M$.

Proof. $t = \operatorname{depth}_R M$ についての induction. $t > 0$ で $t-1$ まで正しいとして十分.
$f\in\mathfrak{m}$ を an M-regular にとる. $P\in \operatorname{Min}_R R/fR + Q$ をとる. すると $\dim R_P/fR_P + QR_P = 0$ より $\dim R_P/QR_P = 1$. $\therefore Q \underset{1}{\subsetneq} P$. $\therefore \dim R/Q \geq \dim R/P + 1$.
$Q \subset P$ であるから $P\in \operatorname{Supp}_R M$ であって $\operatorname{depth}_{R_P} M_P - 1 = \operatorname{depth}_{R_P} M_P/fM_P$. $\therefore \dim R/P \geq t-1$ if

$P\in \mathrm{Ass}_R M/fM$. 一方で, exact; $0 \to L \to M \to N \to 0$ を $\mathrm{Ass}_R L = \{Q\}$, $\mathrm{Ass}_R N = \mathrm{Ass}_R M \backslash \{Q\}$ にとると f は N-nzd であって $0 \to L/fL \to M/fM$, そして $Q \subset P \ni f$ より $P \in \mathrm{Supp}_R L/fL$ をうる. 一方で, $\mathrm{Min}_R L/fL \ni {}^{\exists}\mathfrak{p}$ s,t $\mathfrak{p} \subsetneq P$ とすれば $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R L$ より $Q + fR \subseteq \mathfrak{p}$. しかしこれは P の極小性に反する. これより $P \in \mathrm{Min}_R L/fL$. よって $\mathrm{depth}_{R_P} M_P/fM_P = 0$.
$\therefore \dim R/Q - 1 \geq \dim R/P \geq \mathrm{depth}\, M/fM = t - 1$. $\therefore \dim R/Q \geq \mathrm{depth}_R M$. □

Corollary 2.4.12. *M が a C-M R-module ならば* $\mathrm{Ass}_R M = \mathrm{Assh}_R M = \mathrm{Min}_R M$.

Theorem 2.4.13. *$n = \dim_R M > 0$ のときは次は同値である.*

(1) *M は a C-M R-module である.*
(2) *${}^{\forall}sop$ は M-regular sequence をなす.*
(3) *M-regular sequence をなす sop が存在する.*

Proof. (1)⇔(3)⇐(2) は自明である. (1)⇒(2) を示す. $f_1, \cdots, f_n$ を M の sop とすると $f_1 \notin Q$ for ${}^{\forall}Q \in \mathrm{Assh}_R M = \mathrm{Ass}_R M$. $\therefore f_1$ は an M-regular. 以下, 繰り返し. □

Lemma 2.4.14. *${}^{\forall}Q \in \mathrm{Supp}_R M$, $\dim R/Q + \mathrm{depth}\, M_Q \geq \mathrm{depth}\, M$.*

Proof. $s = \mathrm{depth}\, M_Q$ についての induction で示す. $s = 0$ は上の補題による. よって $s > 0$ として $s - 1$ 以下まで正しいとせよ.
もし $Q \subsetneq \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, M} P \Rightarrow Q \subsetneq P$ ${}^{\exists}P \in \mathrm{Ass}_R M$. $\therefore \dim R/Q > \dim R/P \geq \mathrm{depth}\, M$. $\therefore \dim R/Q + s > t$.
$Q \not\subseteq \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, M} P \Rightarrow$ であれば ${}^{\exists}f \in Q \backslash P$ ${}^{\forall}P \in \mathrm{Ass}_R M$. よって $f \in Q$ は an M-regular である. $\therefore \frac{f}{1} \in QR_Q$ は an M_Q-regular. $\therefore \mathrm{depth}\, M_Q/fM_Q = \mathrm{depth}\, M_Q - 1$.

$$\therefore \quad \dim R/Q + \mathrm{depth}(M/fM)_Q \geq t - 1.$$

$$\therefore \quad \dim R/Q + \mathrm{depth}\, M_Q \geq t.$$

□

Corollary 2.4.15. *M は a C-M R-module ならば ${}^{\forall}Q \in \mathrm{Supp}_R M$ に対して M_Q は a C-M R_Q-module であって $dim_R M = \dim R/Q + \dim R_Q$ が成立する.*

Corollary 2.4.16. *M は a C-M R-module ならば $P \subsetneq Q$ を $\mathrm{Supp}_R M$ の元とすると $P \subset Q$ をつなぐ maximal chain の長さは一定である.*

Proof. $P \in \mathrm{Ass}_R M$, $Q = \mathfrak{m}$ として十分. $d = \dim_R M > 0$ として $P = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d = \mathfrak{m}$ を a max chain とする. $M_{P_{d-1}}$ は a C-M module で $\dim R/P_{d-1} + \dim M_{P_{d-1}} = 1 + \dim M_{P_{d-1}} = d$ より $\dim M_{P_{d-1}} = d - 1$. 後は induction に従う. □

Corollary 2.4.17. *R が a regular local ring なら R は a C-M ring であり, ${}^{\forall}ssop$; $f_1, \cdots, f_n$ について $R/(f_1, \cdots, f_n)$ は a C-M local ring となる.*

Remark 2.4.18. R が *Noetherian* で $f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{J}(R)$ $(n > 0)$, $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のときは $\underline{f}$ が *an* M*-regular sequence* であれば, $f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(n)}$ $({}^{\forall}\sigma \in \mathfrak{S}_n)$ は *an* M*-regular sequence* である. 証明は *Koszul complex* を用いるのがよいであろう.

Exercise 5. $(R, \mathfrak{m})$ *Noeth local,* $d = \dim R > 1$ として $X = \operatorname{Spec} R \backslash \{\mathfrak{m}\}$ とする. そして $M = \bigoplus_{Q \in X} R/Q$ とする. このとき

(1) $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}_R M$.
(2) ${}^{\forall} f \in R$ は *an* M*-regular* ではない.

2.5 $\operatorname{hd}_R M + \operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth}_R R$

以下, $(R, \mathfrak{m})$ は a Noetherian local ring とする. この節の目的は上の主張を示すことである. すなわち

Theorem 2.5.1. $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ について

$$\operatorname{hd}_R M < \infty. \Rightarrow \operatorname{hd}_R M + \operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth}_R R.$$

Proof. $\operatorname{depth} R = 0$ とすると, もし $n = \operatorname{hd}_R M > 0$ なら

$$0 \to F_n \xrightarrow{\partial} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

を a min free resolution of M とすれば $0 \neq x \in R$ を $x\mathfrak{m} = (0)$ にとると, $\partial(xF_n) = (0)$. (矛盾) $\therefore n = 0$ となり M は free となり正しい.
$t = \operatorname{depth} R > 0$ とする. M が free ならいうことなし. $n > 0$ としてよい. $n-1$ まで正しいとする. 今, M の a min free resolution を

$$0 \to L \to F_0 \to M \to 0$$

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_2 \to F_1 \to L \to 0$$

と分解すると $(0) \neq L \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $\operatorname{hd}_R L = n - 1$. $\therefore \operatorname{depth}_R L + (n-1) = t$. (もちろん $\operatorname{depth}_R L > 0$ であるから $t \geq n$.) $q = \operatorname{depth}_R M = 0$ なら Depth Lemma より $\operatorname{depth}_R L = 1$. $\therefore t = n = n + q$.
$q > 0$ とすると, $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}_R M \cup \operatorname{Ass} R$ であるから ${}^{\exists} f \in \mathfrak{m}$ s,t f は an (R, M)-regular. $\therefore \operatorname{hd}_R M/fM = n$ より t についての induction を併用して $n + \operatorname{depth}_R M/fM = n + (q-1) = t - 1$. $\therefore n + q = t$. □

Corollary 2.5.2. R が *a RLR* のときは $(0) \neq M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ について

$$M \text{ は } a\ C-M\ R-module \text{ である}. \Leftrightarrow \dim R - \operatorname{hd}_R M = \dim_R M.$$

とくに M が *a MCM R-module* ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ M は $a\ C-M\ R-module$ であってかつ $\dim_R = \dim R$ である.) なら M は *free* である.

2.6 $C-M$ 環と非混合定理

R は Noetherian とする.

Definition 19. *R が a C-M ring である.* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $^{\forall}Q\in \operatorname{Spec} R$, *$R_Q$ は a C-M local ring である.*
よって, 全ての a regular ring は a C-M ring である.

Definition 20. *R 内に非混合定理が成立するとは,*

$I \subsetneq R$ *ideal がもし* $I=(f_1,\cdots,f_n)$ *where* $n=\operatorname{ht}_R I$ *ならば*$^{\forall}Q\in \operatorname{Ass}_R R/I$ *について* $\operatorname{ht}_R Q=n$ *である*

が成立することをいう.

Theorem 2.6.1. *R が a C-M ring である.* $\Leftrightarrow$ *R 内に非混合定理が成立する.*

Proof. ($\Rightarrow$) $f_1,\cdots,f_n\in R$ $(n>0)$ で $I=(f_1,\cdots,f_n)$ とするとき $I\subsetneq R$ で $\operatorname{ht}_R I=n$ とせよ. $Q\in \operatorname{Ass}_R /I$ をとり R_Q をとおすと $\operatorname{ht}_{R_Q} IR_Q=n$. よって R local としてよい. そこで n についての induction で $f_1,\cdots,f_n$ が an R-regular sequence をなすことを示す. $n=0$ ならいうことなし. $n>0$ で $n-1$ まで正しいとすると, $^{\forall}Q\in \operatorname{Min}_R R/(f_1,\cdots,f_{n-1})$, $\dim R_Q\le n-1$. もし $\dim R_Q\le n-2$ ならば $f_n\notin Q$ であるから $Q+(f_n)\subseteq P$ を minimal にとると $\dim R_P/QR_P=1$. R は a C-M local ring であるから $\dim R_P=1+\dim R_Q\le n-1$. $\therefore \operatorname{ht}_R I\le n-1$ となり矛盾. $\therefore \operatorname{ht}_R(f_1,\cdots,f_{n-1})=n-1$. $\therefore f_1,\cdots,f_{n-1}$ は an R-regular sequence であって $^{\forall}Q\in \operatorname{Ass}_R R/(f_1,\cdots,f_{n-1})=\operatorname{Min}_R R/(f_1,\cdots,f_{n-1})$, $\dim_R=n-1$ より $f_n\notin Q$. $\therefore f_1,\cdots,f_n$ は an R-regular sequence をなし $\operatorname{ht}_R Q=n$ for $^{\forall}Q\in \operatorname{Ass}_R R/I$.
($\Leftarrow$) $Q\in \operatorname{Spec} R$ をとり $\operatorname{ht}_R Q=n$ とすると $^{\exists}f_1,\cdots,f_n\in Q$ s,t $\operatorname{ht}_R(f_1,\cdots,f_i)=i$ for $0\le {}^{\forall}i\le n$. とくに $\operatorname{ht}_R(f_1,\cdots,f_n)=n$. $\therefore Q\in \operatorname{Min}_R R/(f_1,\cdots,f_n)$. ところで $0\le {}^{\forall}i<n$, $^{\forall}P\in \operatorname{Ass}_R R/(f_1,\cdots,f_i)$ をとれば $\operatorname{ht}_R P=i$ であるから $f_{i+1}\notin P$ となり, 従って $f_1,\cdots,f_n$ は an R-regular sequence をなす. $\therefore R_Q$ は a C-M local ring である. □

Remark 2.6.2. この定理は $R=k[X_1,\cdots,X_n]$ $(n>0;\ k=a\ field)$ のときは *Macaulay* による. 又, *R が a regular local ring* のときは *Cohen* によるものである.

Corollary 2.6.3. *R a C-M ring のとき* $f_1,\cdots,f_n\in\mathfrak{m}$ *について*

$$\operatorname{ht}_R(f_1,\cdots,f_n)=n.\Rightarrow f_1,\cdots,f_n \text{は } R \text{ 内で } ssop \text{ をなす.}$$

従って正則列をなしている. もちろん $R/(f_1,\cdots,f_n)$ *は a C-M ring である.*

2.7 Flat base changes (II)

$\varphi: R\to S$ を Noetherian rings の a flat homomorphism とする.

Lemma 2.7.1. $^{\forall}M\in R-\mathrm{mod}$, $\operatorname{Ass}_S(S\otimes_R M)=\displaystyle\bigcup_{P\in \operatorname{Ass}_R M}\operatorname{Ass}_S S/PS.$

Proof. (⊇) $M \neq (0)$ としてよい．$P\in \mathrm{Ass}_R\, M$, $0 \to R/P \to M$ exact より $0 \to S/PS \to S \otimes_R M$ exact. $\therefore {}^{\forall}P\in \mathrm{Ass}_R\, M$, $\mathrm{Ass}_S\, S/PS \subseteq \mathrm{Ass}_S\, S \otimes_R M$.
(⊆) まず，$M\in \underline{\underline{M}}(R)$ とする．${}^{\exists}M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = (0)$ s,t $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ for some $\mathfrak{p}_i\in \mathrm{Ass}_R\, M$. ${}^{\forall}i$, $0 \to M_{i+1} \to M_i \to R/\mathfrak{p}_i \to 0$ は exact なので ${}^{\exists}exact$; $0 \to S \otimes_R M_{i+1} \to S \otimes_R M_i \to S/\mathfrak{p}_i S \to 0$.
$\therefore \mathrm{Ass}_S\, S \otimes_R M \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ass}_S\, S/\mathfrak{p}_i S$. $\therefore {}^{\forall}Q\in \mathrm{Ass}_S\, S \otimes_R M$, ${}^{\exists}i$ s,t $Q\in \mathrm{Ass}_S\, S/\mathfrak{p}_i S$. $\mathfrak{p} := Q \cap R$ とおくと $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$. もし ${}^{\exists}s\in\mathfrak{p}$ s,t $s \notin \mathfrak{p}_i$ であれば s は $R/\mathfrak{p}_i$-nzd, $\varphi(s)$ は $S/\mathfrak{p}_i S$-nzd. しかし $s\in\mathfrak{p}$ としていたので $\varphi(s) \in Q$ である．今 $Q\in \mathrm{Ass}_S\, S/\mathfrak{p}_i S$ であったので矛盾．よって $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ をうる．
次に，$\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R\, M$ を示す．もし $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_R\, M$ であれば，$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}\, M_\mathfrak{p}$ より ${}^{\exists}f\in\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ s,t f は an $M_\mathfrak{p}$-regular. ここで

$$\begin{tikzcd} R_\mathfrak{p} \arrow[r, "{}^{\exists}\psi"] & S_Q & \textit{flat local} \\ R \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & S \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

とおくと $\psi(f) \in QS_Q$ は an $S_Q \otimes_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$-regular である．しかしながら $S_Q \otimes_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \cong [S \otimes_R M]_Q$ であるから $QS_Q \notin \mathrm{Ass}_{S_Q}[S \otimes_R M]_Q$, よって $Q \notin \mathrm{Ass}_S\, S \otimes_R M$ となり矛盾. $\therefore \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R\, M$.
よって $M\in \underline{\underline{M}}(R)$ については正しい．$M\in R-\mathrm{mod}$ とする．${}^{\forall}Q\in \mathrm{Ass}_S\, S \otimes_R M$, $Q = (0) \underset{S}{:} \alpha$ ($\alpha\in S \otimes_R M$) とかく．ここで $\alpha = \displaystyle\sum_{i\geq 1} s_i \otimes_R m_i$ ($s_i\in S$, $m_i\in M$) とあらわし $M' := \displaystyle\sum_{i\geq 1} R \cdot m_i$ とおく．このとき $Q\in \mathrm{Ass}_S\, S \otimes_R M'$ となるので

$$Q\in \mathrm{Ass}_S\, S \otimes_R M' = \bigcup_{P\in\, \mathrm{Ass}_R\, M'} \mathrm{Ass}_S\, S/PS \subseteq \bigcup_{P\in\, \mathrm{Ass}_R\, M} \mathrm{Ass}_S\, S/PS$$

をうる． □

Theorem 2.7.2. $(R, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (S, \mathfrak{n})$ はさらに *local* とする．このとき ${}^{\forall}M\in \underline{\underline{M}}(R)$ について

$$\dim_S S \otimes_R M = \dim S/\mathfrak{m}S + \dim_R M$$
$$\mathrm{depth}_S\, S \otimes_R M = \mathrm{depth}\, S/\mathfrak{m}S + \mathrm{depth}_R\, M$$

が成立する．

Proof. $I = (0) \underset{R}{:} M$ とすると $\dim_R M = \dim R/I$. 一方，$0 \to I \to R \to \mathrm{Hom}_R(M, M)$ より $0 \to IS \to S \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R M)$. $\therefore \dim_S S \otimes_R M = \dim S/IS$. $\therefore R/I \to S/IS$ flat local をみて $\dim_S S \otimes_R M = \dim S/\mathfrak{m}S + \dim_R M$ をうる．

これから depth のほうを証明する．
$t = \mathrm{depth}_R\, M$ とする．$t > 0$ なら $f_1, \cdots, f_t\in\mathfrak{m}$; an M-regular sequence をとり $\overline{M} := M/(f_1, \cdots, f_t)M$ とおくと $\{f_1, \cdots, f_t\}$ は an $S\otimes_R M$-regular でもあるから $\mathrm{depth}_S\, S\otimes_R \overline{M} = \mathrm{depth}_S\, S\otimes_R M - t$, $\mathrm{depth}_R\, \overline{M} = 0$. $\therefore t = 0$ として十分．これから $\mathrm{depth}_S\, S \otimes_R M = \mathrm{depth}\, S/\mathfrak{m}S$ for $M\in \underline{\underline{M}}(R)$, $\mathrm{depth}_R\, M = 0$ を示す．
$s = \mathrm{depth}\, S/\mathfrak{m}S$ とおく．もし $s = 0$ なら $0 \to R/\mathfrak{m} \to M$ より $0 \to S/\mathfrak{m}S \to S\otimes_R M$ から $\mathfrak{n}\in \mathrm{Ass}_S\, S\otimes_R M$.

$\therefore$ $\mathrm{depth}_S \otimes_R M = 0$. $s > 0$ とし $s-1$ まで正しいとせよ.
$^\exists f \in \mathfrak{n}$ s,t f は an $S/\mathfrak{m}S$-regular. このとき実は, $\mathrm{depth}_S\, S \otimes_R M > 0$ である. ($\because$ $\mathrm{depth}_S\, S \otimes_R M = 0 \Rightarrow$ $\mathfrak{n} \in \mathrm{Ass}_S\, S/\mathfrak{p}S$ for some $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R\, M \Rightarrow$ 上に示したように $\mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{p}$ より $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \Rightarrow \mathrm{depth}\, S/\mathfrak{m}S = 0$.) であるから f は an $S \otimes_R M$-regular でもある. すると $R \to S/fS$ は証明は後にするが flat である. よって

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{depth}_S \dfrac{S \otimes_R M}{f(S \otimes_R M)} & = & \mathrm{depth}_S\, S \otimes_R M - 1 \\ \| & & \\ \mathrm{depth}\, \dfrac{S}{\mathfrak{m}S + fS} & = & \mathrm{depth}\, \dfrac{S}{\mathfrak{m}S} - 1 \end{array}$$

となる. さて $R \to S/fS$ flat を証明しよう.
これは, $f \in \mathfrak{n}$ が an $S/\mathfrak{m}S$-regular であることに従うのだが, まず f は an S-regular であることに注目する. $^\forall i \geq 0$,

$$0 \to \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} \to R/\mathfrak{m}^{i+1} \to R/\mathfrak{m}^i \to 0 \quad \textit{exact}$$

より $V_i := \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ とおくと

$$0 \to S \otimes_R V_i \to S/\mathfrak{m}^{i+1}S \to S/\mathfrak{m}^i S \to 0 \quad \textit{exact}$$

である. このとき $S \otimes_R V_i \cong (S/\mathfrak{m}S)^{\alpha_i}$ for some $\alpha_i \geq 0$ とかける. ここで i についての induction から f は an $S/\mathfrak{m}^i S$-regular ($^\forall i \geq 0$) をうる. $\therefore$ $x \in S$ について $fx = 0$ なら $x \in \mathfrak{m}^i S$ ($^\forall i \geq 0$). $\therefore$ $x = 0$ となり, 確かに f は an S-regular である. よって

$$0 \to S \xrightarrow{\widehat{f}} S \to S/fS \to 0 \quad \textit{exact}$$

をうる. ここで $\overline{S} := S/fS$ とおく. すると

$$(0) = \mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, S) \to \mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, \overline{S}) \to S/\mathfrak{m}S \xrightarrow{\widehat{f}} S/\mathfrak{m}S \to \overline{S}/\mathfrak{m}\overline{S} \to 0$$

より $\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, \overline{S}) = (0)$. よって次を示せば十分. $\square$

Lemma 2.7.3. $(A, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (B, \mathfrak{n})$ は *a local homomorphism of Noetherian local rings* とする.

$$\mathrm{Tor}_1^A(B, A/\mathfrak{m}) = (0). \Leftrightarrow \varphi \text{ は } \textit{a flat homomorphism} \text{ である.}$$

Proof. ($\Leftarrow$) は自明なので ($\Rightarrow$) だけを示す. $\mathrm{Tor}_1^A(B, X) = (0)$ for $^\forall X \in A - \mathrm{mod}$ をいえばよいのだが, injective limit の議論から $X \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(A)$ に制限してよい. よって

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \underset{f,g\ free}{F} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

をとると

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(B, X) \to B \otimes_A Y \to B \otimes_A F \to B \otimes_A X \to 0$$

をうる. よって $^\forall$*exact*; $0 \to Y \xrightarrow{\alpha} F \cong A^n$ に対して $0 \to B \otimes_A Y \xrightarrow{B \otimes_A \alpha} B \otimes_A F$ exact を示せばよい. $Y \subseteq F$ としてよい. $^\forall i \in \mathbb{Z}$, $Y_i := \mathfrak{m}^i F \cap Y$ とする. $F_i := \mathfrak{m}^i F$ とすると

$$0 \longrightarrow Y/Y_i \longrightarrow F/F_i \longrightarrow F/Y + F_i \longrightarrow 0\,, \quad \ell_A(F/Y + F_i) < \infty$$

より $0 \to B \otimes_A Y/Y_i \to B \otimes_A F/F_i$ exact をうる．($C_i := F/Y + F_i$ とおく．) 一般論で, $0 \to L \to M \to N \to 0$ は exact で $\ell_A(N) < \infty$ ならば $0 \to B \otimes_A L \to S \otimes_A M$ は完全であることが知られている．その証明は $\ell_A(N)$ についての induction である．今,

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ & Y_i \arrow[r] \arrow[d] & F_i \arrow[d] & & \\ & Y \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & Y/Y_i \arrow[r] & F/F_i \arrow[r] & C_i \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

であって $\ell_A(F/F_i) < \infty$ より

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ & B \otimes_A Y_i \arrow[r] \arrow[d] & B \otimes_A F_i \arrow[d] \\ & B \otimes_A Y \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\tau"'] & B \otimes_A F \arrow[d, "\eta"] \\ 0 \arrow[r] & B \otimes_A Y/Y_i \arrow[r, "\rho"'] & B \otimes_A F/F_i \end{tikzcd}$$

をうる．このとき $\alpha \in B \otimes_A Y$, $\xi(\alpha) = 0$ とすると $\tau(\alpha) = 0$ より $\alpha \in B \otimes_A Y_i$ for $^\forall i \in \mathbb{Z}$ である．ところで Artin-Rees より $0 \le {}^\exists k \in \mathbb{Z}$ s,t $^\forall n \ge 0$, $\mathfrak{m}^n(\mathfrak{m}^k F \cap Y) = \mathfrak{m}^{n+k} F \cap Y = Y_{n+k}$. $\therefore Y_{n+k} \subseteq \mathfrak{m}^n Y_k$.

$$\therefore \quad \mathrm{Im}(B \otimes_A Y_i \to B \otimes_A F_i) \subseteq (\mathfrak{m}^n B)(B \otimes_A Y).$$

$$\therefore \quad \alpha \in \bigcap_{i>0} \mathfrak{n}^i (B \otimes_A Y) = (0).$$

□

Corollary 2.7.4. $(R, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (S, \mathfrak{n})$ *local* とする．

$$R \text{ と } S/\mathfrak{m}S \text{ は } C-M \textit{ local rings} \text{ である．} \Leftrightarrow S \text{ は } a\ C-M \textit{ local ring} \text{ である．}$$

Corollary 2.7.5. A が *a C-M ring* ならば $A[X_1, \cdots, X_n]$ も *a C-M ring* $(n > 0)$ である．

Proof. $B = A[X]$ とする．$A \to B$ は flat である．$^\forall Q \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{q} := Q \cap A$ とおくと $(A/\mathfrak{q}[X])_Q$ は a RLR であって a C-M local ring となることによる． □

2.8 $\mathrm{grade}_N M$

R は a Noetherian とする.

Lemma 2.8.1. *$M, N \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のとき次は同値である.*

(1) $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq (0)$.
(2) $\mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R N \neq \emptyset$.
(3) $^\forall f \in \mathrm{Ann}_R M$ は *an N-zd* である.

Proof. $\mathrm{Ass}_R \mathrm{Hom}_R(M,N) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R N$ より (1)⇔(2) をうる. $I := (0) \underset{R}{:} M$ とおくと (1)⇒ $^\exists P \in \mathrm{Ass}_R N$ s,t $I \subseteq P$. $\therefore P = (0) \underset{R}{:} n$ となる $0 \neq n \in N$ をとると $^\forall f \in I$, $fn = 0$. $\therefore f$ は an N-zd である. (3)⇒ $I \subseteq \displaystyle\bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}_R N} Q$ より $^\exists Q \in \mathrm{Ass}_R N$ s,t $I \subseteq Q$. $\therefore \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R N \neq \emptyset$. □

以下, $M, N \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $I = (0) \underset{R}{:} M$ とする.

Lemma 2.8.2. *次の条件は同値である.*

(1) $M \otimes_R N = (0)$.
(2) $^\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = (0)$.

Proof. (2)⇒(1) $\mathrm{Hom}_R(M,N) = (0)$ より $\mathrm{V}(I) \cap \mathrm{Ass}_R N = \emptyset$. $\therefore {}^\exists f \in I$ s,t f は an N-nzd. $0 \to N \xrightarrow{\widehat{f}} N \to N/fN \to 0$ より $0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N/fN) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ (ex). $\therefore \mathrm{Hom}_R(M, N/fN) = (0)$, $\mathrm{Ext}_R^i(M, N/fN) = (0)$ for $^\forall i \in \mathbb{Z}$. よってこれを繰り返すことにより

$$^\exists f_1, f_2, \cdots, f_i, \cdots \in I \ s,t\ 0 \to N/(f_1, \cdots, f_{i-1})N \xrightarrow{\widehat{f_i}} N/(f_1, \cdots, f_{i-1})N \quad (ex)\ for\ ^\forall i > 0.$$

もし $M \otimes_R N \neq (0)$ ならば $^\exists Q \in \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R N$. よって $n = \mathrm{depth}_{R_Q} N_Q$ とおくと $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ となるが, 上の操作は $n+1$ 回もは繰り返せないので矛盾. $\therefore M \otimes_R N = (0)$.
(1)⇒(2) $M \otimes_R N = (0)$ より $\mathrm{Hom}_R(M,N) = (0)$. $\therefore {}^\exists f \in I$ s,t $0 \to N \xrightarrow{\widehat{f}} N \to N/fN \to 0$ (ex).

$$\therefore \quad \cdots \to \mathrm{Ext}_R^i(M,N) \xrightarrow{\widehat{f}} \mathrm{Ext}_R^i(M,N) \to \mathrm{Ext}_R^i(M, N/fN) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,N) \xrightarrow{\widehat{f}} \cdots \quad exact.$$

このとき $\widehat{f} = 0$ であって $M \otimes_R N/fN = (0)$ より i についての induction を用いて $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = (0)$ for $^\forall i \geq 0$ となる. □

Corollary 2.8.3. *$M \otimes_R N \neq (0)$ のときは*

$$\mathrm{grade}_N M := \min\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{Ext}_R^i(M,N) \neq (0)\},$$

と定め, 一方で $M \otimes_R N = (0)$ のときは $\mathrm{grade}_N M = \infty$ と定める. このとき, もし $M \otimes_R N \neq (0)$ ならば

(1) $0 \leq \mathrm{grade}_N M < \infty$.
(2) $\mathrm{grade}_N M > 0.$ ⇔ $^\exists f \in I$ *s,t f は an N-regular.*
(3) $f \in I$ が *an N-regular* なら $M \otimes_R N/fN \neq (0)$ であってかつ $\mathrm{grade}_N M = \mathrm{grade}_{N/fN} M - 1$.

Proof. もちろん $0 \le \operatorname{grade}_N M =: n \in \mathbb{Z}$ となる．そして (2) は証明済みである．よって (3) だけをみる．

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\widehat{f}} N \longrightarrow N/fN \longrightarrow 0$$

をみるに $\overline{N} := N/fN$ とおくと $M \otimes_R \overline{N} \neq (0)$.

$$^\forall i \in \mathbb{Z},\ 0 \to \operatorname{Ext}^i_R(M,N) \to \operatorname{Ext}^i_R(M,\overline{N}) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_R(M,N) \to 0 \quad \textit{exact}$$

より $n-1 = \operatorname{grade}_{\overline{N}} M$ である． □

Corollary 2.8.4. $M \otimes_R N \neq (0)$, $n = \operatorname{grade}_N M$ とおくと

(1) $^\exists f_1, \cdots, f_n \in I$; *an N-regular sequence.*
(2) $g_1, \cdots, g_m \in I$ が *an N-regular sequence.* $\Rightarrow$
　$m \le n$ でありしかも $^\exists g_{m+1}, \cdots, g_n \in I$ *s,t* $g_1, \cdots, g_m, g_{m+1}, \cdots, g_n$ は *an N-regular sequence.*

Proof. (1) $n=0$ ならいうことなし．$n>0$ なら $^\exists f \in I$; an N-regular element. よって後は n についての induction による．
(2) $m=0$ ならば (1) そのものである．$m>0$ ならば $\operatorname{grade}_{N/(g_1,\cdots,g_m)N} M = n-m \ge 0$. $\therefore m \le n$.
$m<n$ なら (1) による． □

Theorem 2.8.5. $M \otimes_R N \neq (0)$ のとき $\operatorname{grade}_N M = \inf\limits_{Q \in \operatorname{Supp}_R M \cap \operatorname{Supp}_R N} \operatorname{depth}_{R_Q} N_Q$.

Proof. $Q \in \operatorname{Supp}_R M \cap \operatorname{Supp}_R N \Rightarrow n = \operatorname{grade}_N M$ とすると $^\exists f_1, \cdots, f_n \in I$; an N-regular. $\therefore I \subseteq Q$, $N_Q \neq (0)$ より $\operatorname{depth}_{R_Q} N_Q \ge n$. $m = \inf\limits_{Q \in \mathrm{V}} \operatorname{depth}_{R_Q} N_Q$ where $\mathrm{V} := \operatorname{Supp}_R M \cap \operatorname{Supp}_R N$ とおくと $m \ge n$. $m=n$ を示す．$0<m$ としてよい．このとき $^\forall Q \in \operatorname{Ass}_R N$, $\operatorname{depth}_{R_Q} N_Q = 0$ より $I \not\subseteq Q$.
$\therefore \operatorname{Hom}_R(M,N) = (0)$ で $n>0$. $\therefore {}^\exists f \in I$ an N-regular element. $\overline{N} := N/fN$ とおくと $\operatorname{grade}_{\overline{N}} M = n-1$; $^\forall Q \in \mathrm{V}$, $f \in Q$, $N_Q \neq (0)$ であるから $\operatorname{depth}_{R_Q} N_Q/fN_Q = \operatorname{depth}_{R_Q} N_Q - 1$. $\therefore m$ についての induction による． □

Corollary 2.8.6. $(0) \neq {}^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $\operatorname{grade}_R M = \inf\limits_{Q \in \operatorname{Supp}_R M} \operatorname{depth} R_Q$.

Corollary 2.8.7. $(R,\mathfrak{m})$ を *a C-M local ring* とせよ．$(0) \neq {}^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ について $\operatorname{grade}_R M = \operatorname{ht}_R I = \dim R - \dim_R M$ *where* $I = (0) \underset{R}{:} M$.

Proof. $\operatorname{grade}_R M = \inf\limits_{Q \in \operatorname{Supp}_R M} \operatorname{depth} R_Q = \inf\limits_{Q \in \mathrm{V}(I)} \dim R_Q = \operatorname{ht}_R I$. そして R が a C-M local ring であるから $\operatorname{ht}_R I = \dim R - \dim R/I$ をみたしている． □

$I \subsetneq R$ an ideal に対してこれからは $\operatorname{grade}_M R/I$ を $\operatorname{grade}(I,M)$ とかくことにする．

Lemma 2.8.8. $I \subsetneq R$ *an ideal,* $(0) \neq {}^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ で $\operatorname{grade}(I,M) = n$ とする．もし $I = (f_1, \cdots, f_n)$ *for* $^\exists f_1, \cdots, f_n \in R$ ならば $^\exists g_1, \cdots, g_n \in I$ *s,t* $g_1, \cdots, g_n$ は *an M-regular sequence* をなし，かつ $I = (g_1, \cdots, g_n)$.

Proof. $n=0$ なら自明. $n>0$ とする. $I=(f_1)+(f_2,\cdots,f_n)\not\subseteq \bigcup_{Q\in \mathrm{Ass}_R M} Q$ であるから $^\exists x\in(f_2,\cdots,f_n)$ s,t $g_1:=f_1+x\notin \bigcup_{Q\in \mathrm{Ass}_R M} Q$. このとき $(f_1,\cdots,f_n)=(g_1,f_2,\cdots,f_n)$ であって g_1 は an M-regular であるのは明らか. よって $g_1,\cdots,g_k$ $(1\le k<n)$ までは an M-regular sequence をなし, かつ $I=(g_1,\cdots,g_k,f_{k+1}\cdots,f_n)$ となるように取れたとしてよい. $\overline{M}=M/(f_1,\cdots,f_k)M$ とおく. $\mathrm{grade}(I,\overline{M})=n-k>0$. $\therefore (g_1,\cdots,g_k)\subseteq I$, $(f_{k+1})+(f_{k+2},\cdots,f_n)\not\subseteq \bigcup_{Q\in \mathrm{Ass}_R \overline{M}} Q$. $\therefore {}^\exists y\in(f_{k+2},\cdots,f_n)$ s,t $g_{k+1}:=f_{k+1}+y\notin \bigcup_{Q\in \mathrm{Ass}_R \overline{M}} Q$.
$\therefore (g_1,\cdots,g_{k+1},f_{k+2},\cdots,f_n)=I$, であって更に $g_1,\cdots,g_{k+1}$ は an M-regular sequence をなす. □

Lemma 2.8.9. *A を可換環とし, $M\in A-\mathrm{mod}$ とする. もし $\{a,f\}$, $\{b,f\}$ が M-nzd sequences ならば $\{ab,f\}$ も an M-nzd sequence をなす. 従って $\{a_1,\cdots,a_n\}$ が an M-nzd sequence であれば $\{a_1^{\alpha_1},\cdots,a_n^{\alpha_n}\}$ $({}^\forall\alpha_i>0)$ も an M-nzd sequence をなす.*

Proof.

$$^\exists exact;\ 0\longrightarrow M/bM\longrightarrow M/abM\longrightarrow M/aM\longrightarrow 0$$

による. □

以上を用いるとき次のようにして

$(R,\mathfrak{m})$ *local*, $(0)\neq M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ のとき, $^\exists sop\ s,t\ M-regular$ をなす. $\Rightarrow {}^\forall sop$ は $M-regular\ sequence$ をなす.

が成立する.

Proof. $d=\dim_R M>0$ としてよい. $\underline{b}=b_1,\cdots,b_d$ は an M-regular sequence をなす sop とせよ. そして $^\forall sop$ $\underline{a}=a_1,\cdots,a_d$ をとる. $I=(0)\underset{R}{:}M$ とすると $\sqrt{I+(a_1,\cdots,a_d)}=\mathfrak{m}$. $\therefore {}^\exists\ell>0$ s,t $b_1^\ell,\cdots,b_d^\ell\in I+(a_1,\cdots,a_d)$. ここで R/I をとおして $I=(0)$ としてよい. $\therefore \{b_1^\ell,\cdots,b_d^\ell\}$ は an M-regular sequence をなし $(b_1^\ell,\cdots,b_d^\ell)\subseteq(a_1,\cdots,a_d)$. Davis's Lemma を繰り返し用いると $(a_1,\cdots,a_d)=(x_1,\cdots,x_d)$ となる $^\exists\{x_1,\cdots,x_d\}$; an M-regular sequence. 一方で, $\underline{a}$ と $\underline{x}$ は正則変換で与えられるので $\mathrm{H}_p(\underline{a};M)=(0)$ for $^\forall p>0$. $\therefore \underline{a}$ は an M-regular sequence をなす. □

Corollary 2.8.10. *$(R,\mathfrak{m})$ が a RLR のとき $(0)\neq M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ とすると*

$$M \text{ は } a\ C-M\ R-module \text{ である.} \Leftrightarrow \mathrm{hd}_R M=\mathrm{grade}_R M.$$

Remark 2.8.11. *$(R,\mathfrak{m})$ local とすると, $\mathrm{hd}_R M\ge\mathrm{grade}_R M$ for $(0)\neq{}^\forall M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$.*

Proof. $h:=\mathrm{hd}_R M<\infty$ として十分. そして

$$0\to F_h\xrightarrow{\partial}F_{h-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0$$

を M の a min free resolution とすれば

$$\mathrm{Hom}_R(F_{h-1},R)\xrightarrow{\partial_*}\mathrm{Hom}_R(F_h,R)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^h(M,R)\longrightarrow 0\quad exact$$

であって ∂_* は全射ではない. よって $\mathrm{Ext}_R^h(M,R)\neq(0)$ より $h\ge\mathrm{grade}_R M$ をうる. □

Remark 2.8.12. $(R, \mathfrak{m})$ *local* のとき $(0) \neq {}^{\forall} M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ について

$$\operatorname{depth}_R M = \operatorname{grade}_M R/\mathfrak{m}$$

である.

第3章　Gorenstein Rings

3.1　Minimal injective resolutions

R は a Noetherian とする．$^\forall M \in R-\mathrm{mod}$ に対して $\mathrm{E}_R(M)$ によって M の the injective envelop をあらわす．定義により $\mathrm{E}_R(M)$ は an injective R-module であって

$$^\exists exact;\quad 0 \to M \xrightarrow{\alpha} \mathrm{E}_R(M) \quad where\ \alpha \text{は}\ essential\ R-linear\ map.$$

であった．

Lemma 3.1.1. *$^\forall I \subsetneq R$ an ideal, $^\forall M \in R-\mathrm{mod}$, $\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{E}_R(M)) \cong \mathrm{E}_{R/I}(\mathrm{Hom}_R(R/I, M))$.*

Proof. $^\forall X \in R-\mathrm{mod}$, $\mathrm{Hom}_R(R/I, X) \cong (0) \underset{R}{:} I$ as R/I-module である．$0 \to M \xrightarrow{\alpha} \mathrm{E}_R(M)$ をみるに $0 \to \mathrm{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{E}_R(M))$ exact である．そして $\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{E}_R(M))$ は injective R/I-module なので α_* が essential を示すだけである．これは

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(R/I, M) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{E}_R(M)) \\ \cap\! | & & \cap\! | \\ M & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{E}_R(M) \end{array}$$

よりほとんど明らかであろう．$\square$

Lemma 3.1.2. *$S \subseteq R$ を乗法系とする．*

(1) $^\forall X \in R-\mathrm{mod}$ で *injective.* $\Rightarrow$ $S^{-1}X$ は *an injective $S^{-1}R$-module* である．
(2) $f : X \to Y$ が *essential.* $\Rightarrow$ $S^{-1}f : S^{-1}X \to S^{-1}Y$ は *essential.*
(3) $^\forall M \in R-\mathrm{mod}$, $\mathrm{E}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) \cong S^{-1}\mathrm{E}_R(M)$.

Proof. (1) と (2) をあわせて (3) をうる．よって (1),(2) だけを示す．
(1) $^\forall J \subseteq S^{-1}R$ an ideal は, $I := J \cap R$ とすると $J = IS^{-1}R$ とかける．よって $\mathrm{Ext}^1_{S^{-1}R}(S^{-1}R/J, S^{-1}X) \cong S^{-1}R \otimes_R \mathrm{Ext}^1_R(R/I, X) = (0)$.
(2) $X \subseteq Y$ としてよい．$0 \neq \frac{y}{s} \in S^{-1}Y$ なら $^\exists Q \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}R)\dfrac{y}{s}$, $P := Q \cap R$ とすると $P \cap S = \emptyset$, $0 \to R/P \to Ry \neq (0)$. $\therefore R/P \cap X =: L \neq (0)$. もちろん $\emptyset \neq \mathrm{Ass}_R L \subseteq \mathrm{Ass}_R R/P = \{P\}$, $P \cap S = \emptyset$ より $(0) \neq S^{-1}L \subseteq S^{-1}X \cap (S^{-1}R)\dfrac{y}{s}$. $\square$

Lemma 3.1.3. *$^\forall M \in R-\mathrm{mod}$, $\mathrm{Ass}_R \mathrm{E}_R(M) = \mathrm{Ass}_R M$.*

Proof. $M \neq (0)$ としてよい. そして $\mathrm{Ass}_R \mathrm{E}_R(M) \supseteq \mathrm{Ass}_R M$ は明らか. ${}^{\forall}P \in \mathrm{Ass}_R \mathrm{E}_R(M)$ をとる. すると

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R/P \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{E}_R(M) \\ & & M \arrow[u, hook, "f"] \end{tikzcd}.$$

$\therefore L := \alpha(R/P) \cap M \neq (0)$. $\therefore {}^{\exists}Q \in \mathrm{Ass}_R L$, $P = Q$. であるから $P \in \mathrm{Ass}_R M$. $\square$

Corollary 3.1.4. $(0) \neq E \in R - \mathrm{mod}$ が直既約でかつ *injective.* $\Rightarrow$ $|\mathrm{Ass}_R E| = 1$ であってかつ $E \cong \mathrm{E}_R(R/Q)$ *where* $\mathrm{Ass}_R\{Q\}$. よって ${}^{\exists 1}Q \in \mathrm{Spec}\, R$ *s,t* $E \cong \mathrm{E}_R(R/Q)$ である.

Proof. ${}^{\forall}P \in \mathrm{Ass}_E R$, $0 \to R/P \to E$. $\therefore E \cong \mathrm{E}_R(R/P)$. $\therefore \mathrm{Ass}_R E = \{P\}$. $\square$

Remark 3.1.5. $(R, \mathfrak{m})$ *Noeth local,* $E = \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ とすると $K := (0) \ltimes E \hookrightarrow R \ltimes E =: A$ は *essential* である.

Proof. $0 \neq f = (a, x) \in A$ をとると $a = 0$ なら $f \in K$. $a \neq 0$ ならば $(a, x) \cdot (b, y) = (ab, ay + bx)$ より $(a, x) \cdot (0, y) = (0, ay)$. $(0) = (0) \underset{R}{:} E$ から $a \neq 0$ より ${}^{\exists}y \in E$ s,t $ay \neq$. $\therefore K \hookrightarrow A$ は essential である. $\square$

$R = k[X_1, X_2, \cdots]/(X_1^2, X_2^2, \cdots)$ とすると $\mathrm{Spec}\, R = \{\mathfrak{m}\}$. しかし ${}^{\nexists}R/\mathfrak{m} \hookrightarrow R$. $\therefore \mathrm{Ass}\, R = \emptyset$ となる. これは高級な反例である.

Theorem 3.1.6. $E \in R - \mathrm{mod}$ とすると

$$(0) \neq E \text{ 直既約でかつ } \textit{injective.} \Leftrightarrow E \cong \mathrm{E}_R(R/Q) \textit{ where } {}^{\exists}Q \in \mathrm{Spec}\, R.$$

Proof. $(\Leftarrow)$ のみ. $Q \in \mathrm{Spec}\, R$ とし $E = \mathrm{E}_R(R/Q)$ とおく. E が直既約を示す.
$E = X \oplus Y$ なら $\mathrm{Hom}_R(R/Q, E) \cong \mathrm{Hom}_R(R/Q, X) \oplus \mathrm{Hom}_R(R/Q, Y) \cong \mathrm{E}_{R/Q}(R/Q)$. 一方 $X \neq (0) \Rightarrow \mathrm{Ass}_R X = \{Q\}$ で $\mathrm{Hom}_R(R/Q, X) \neq (0)$. 同様に $Y \neq (0)$ なら $\mathrm{E}_A(A)$ は直既約ではない. ただし $A = R/Q$ とする. もちろん $K = \mathbb{A} \supseteq A$ を A の商体とすると $i : A \hookrightarrow K$ が the injective envelop. $K = Y \oplus Z$ なら $K = K \otimes_A K \cong K \otimes_A Y \oplus K \otimes_A Z$ で $Y = (0)$ or $Z = (0)$. つまり K は A 上で直既約. よって矛盾. $\square$

Lemma 3.1.7. $\{E_i\}_{i \in I}$ が *injective.* $\Rightarrow$ $\displaystyle\bigoplus_{i \in I} E_i$ は *injective.*

さて $E \in R - \mathrm{mod}$ は $(0) \neq E$ かつ injective とすると ${}^{\forall}Q \in \mathrm{Ass}_R E$, $0 \to \mathrm{E}_R(R/Q) \to E$ exact より

$$I = \{X | (0) \neq X \subseteq E,\ X \text{ は } E \text{ の } R - \textit{submodule} \text{ で直既約かつ } \textit{injective}\}$$

とおく. $I \neq \emptyset$. そしてさらに

$$\mathfrak{S} = \left\{ \emptyset \neq \Lambda \subseteq I \,\middle|\, \sum_{X \in \Lambda} X \text{ は } E \text{ 内で直和をなす} \right\}$$

とおくと $^\forall X \in I$, $\{X\} \in \mathfrak{S}$ より $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. $\mathfrak{S}$ を inclusion で順序集合とみれば $\emptyset \neq {}^\forall \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{S}$ a chain, $\Gamma = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{C}} \Lambda$ とおくと $\Lambda \subseteq \Gamma \subseteq I$, $^\forall \Lambda \in \mathcal{C}$.

$$\varphi : \bigoplus_{X \in \Gamma} X \to \sum_{X \in \Gamma} X$$

を the canonical map とせよ. もし φ が単射でないならば $0 \neq {}^\exists \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ where $^\forall \alpha \in \Gamma$, $x_\alpha \in X_\alpha = \alpha$ であって $x_\alpha = 0$ for almost all $\alpha \in \Gamma$, かつ $\sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = 0$ in E. $\Lambda_0 = \{\alpha \in \Lambda | x_\alpha \neq 0\}$ とすると $\Lambda_0 \neq \emptyset$ であってかつ $|\Lambda_0| < \infty$ である. よって $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ for some $\Lambda \in \mathcal{C}$; $\sum_{\alpha \in \Lambda_0} x_\alpha = 0$ より $x_\alpha = 0$ $^\forall \alpha \in \Lambda_0$. (矛盾)

$\therefore \varphi$ は同型射である. $\therefore {}^\exists \Lambda \in \mathfrak{S}$ max elem.

ここで $Y := \sum_{X \in \Lambda} X$ とおくと $(0) \neq Y \subseteq E$ であってかつ Y は injective より $E = Y \oplus Z$ for $^\exists Z \subseteq E$ an R-submodule of E. もし $Z \neq (0)$ ならば Z は injective であるから $P \in \operatorname{Ass}_R Z$ を一つとり $W = \mathrm{E}_R(R/P)$ とすると $W \subseteq Z$ かつ $W \in \mathfrak{S}$. さらに $Y \cap Z = \emptyset \Rightarrow Y \cap W = \emptyset$. $\therefore Y \subsetneq {}^\exists Y + W \in \mathfrak{S}$. (矛盾)

よって次の定理をうる.

Theorem 3.1.8.
$(0) \neq {}^\forall E \in R - \mathrm{mod}$ で *injective* は, *non-zero indecomposable injective submodule* の直和に分解する.

そこで $(0) \neq {}^\forall E \in R - \mathrm{mod}$, injective とすると

$$I = \{X | (0) \neq X \subseteq E,\ X \text{ は } E \text{ の } R-\textit{submodule} \text{ で直既約かつ } \textit{injective}\}$$

とすると $\emptyset \neq {}^\exists \Lambda \subseteq I$ s,t $E = \sum_{X \in \Lambda} X$ (直和) となった. 今, $^\forall X \in \Lambda$, $X \cong \mathrm{E}_R(R/Q)$ for $^{\exists 1} Q \in \operatorname{Spec} R$ であるから $^\forall Q \in \operatorname{Spec} R$, $\Lambda(Q) := \{X \in \Lambda | X \cong \mathrm{E}_R(R/Q)\}$ とおくとき

Lemma 3.1.9 (分解の一意性). $|\Lambda(Q)| = \dim_{R_Q/QR_Q} \operatorname{Hom}_{R_Q}(R_Q/QR_Q, E_Q)$ *for* $^\forall Q \in \operatorname{Spec} R$.
(これは濃度の意味でも等しい.)

Proof. $^\forall Q \in \operatorname{Spec} R$, $E_Q \cong \bigoplus_{X \in \Lambda} X_Q$ in $R_Q - \mathrm{mod}$ より

$$\operatorname{Hom}_{R_Q}(R_Q/QR_Q, E_Q) \cong \bigoplus_{X \in \Lambda} \operatorname{Hom}_{R_Q}(R_Q/QR_Q, X_Q) \quad \textit{in } R_Q/QR_Q - \mathrm{mod}\,.$$

$X \in \Lambda$ のとき $\operatorname{Ass}_R X = \{\mathfrak{p}\}$ とすれば $X \cong \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{p})$ より $X_\mathfrak{p} \cong \mathrm{E}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$. $\therefore X_Q = (0)$ if $Q \not\supseteq \mathfrak{p}$.
もし $\mathfrak{p} \subsetneq Q$ であれば $\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(R/Q, X) = \operatorname{Ass}_R R/Q \cap \{\mathfrak{p}\}$ から $\operatorname{Hom}_R(R/Q, X) = (0)$ となる.

以上より $\operatorname{Hom}_{R_Q}(R_Q/QR_Q, X_Q) = (0)$ if $Q \neq \mathfrak{p}$ i,e $Q \notin \operatorname{Ass}_R X$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \operatorname{Hom}_{R_Q}(R_Q/QR_Q, E_Q) &\cong \bigoplus_{X \in \Lambda(Q)} \operatorname{Hom}_{R_Q}(R_Q/QR_Q, X_Q) \\ &\cong \bigoplus_{X \in \Lambda(Q)} (R_Q/QR_Q) \\ &\cong (R_Q/QR_Q)^{|\Lambda(Q)|}. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |\Lambda(Q)| = \dim_{R_Q/QR_Q} \operatorname{Hom}_{R_Q}(R_Q/QR_Q, E_Q).$$

$\square$

Definition 21. $M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $Q\in\operatorname{Spec}R$, $i\in\mathbb{Z}$ について

$$\mu^i(Q,M) := \dim_{R_Q/QR_Q}\operatorname{Ext}^i_{R_Q}(R_Q/QR_Q, M_Q)$$

と定め, *the i-th Bass number of M wrt Q* という. 定義より $0\leq\mu^i(Q,M)\in\mathbb{Z}$ である.

Theorem 3.1.10. $M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $Q\in\operatorname{Spec}R$, $0\leq i$ のとき

$$\mu^i(Q,M) = \mathrm{E}^i_R(M) \text{ の直和因子として出現する } \mathrm{E}_R(R/Q) \text{ の指数.}$$

Proof. $(i>0)$, $0\to M\to\mathrm{E}^0\to\mathrm{E}^1\to\cdots\to\mathrm{E}^{i-1}\to X\to 0$ と $0\to X\to\mathrm{E}^i$ に分解すると

$$\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m},M)\cong\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},X)\cong\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},\mathrm{E}^i)$$

となる. 右の同型は $\mathrm{E}^i\cong\mathrm{E}_R(X)$ による. 左は $i=1$ のときをみておくと $0\to M\to\mathrm{E}^0\to X\to 0$ より

$$0\to\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},M)\to\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},\mathrm{E}^0)\to\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},X)\to\operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m},M)\to 0$$

をみるに $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},\mathrm{E}^0)\xrightarrow{0}\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},X)$ である. もちろん

$$0\to M\to\mathrm{E}^0_R(M)\to\mathrm{E}^1_R(M)\to\cdots\to\mathrm{E}^i_R(M)\to\cdots$$

は M の a min injective resoluion である. □

Corollary 3.1.11. $(R,\mathfrak{m})$ *local* のときは $^\forall M\in R-\mathrm{mod}$ について

$$\cdots\to 0\to\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},\mathrm{E}^0_R(M))\xrightarrow{\partial_0}\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},\mathrm{E}^1_R(M))\xrightarrow{\partial_1}\cdots\to\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m},\mathrm{E}^i_R(M))\to\cdots$$

は $0-cpx$ $(i,e\ \partial_i=0\ for\ ^\forall i\ )$ である.

Lemma 3.1.12. $M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $P,Q\in\operatorname{Spec}R$ で $P\subsetneq Q$ *minimal* $(i,e\ \dim R_Q/PR_Q=1)$ とする. このとき $0\leq i$ について

$$\mu^i(P,M)>0.\Rightarrow\mu^i(Q,M)>0.$$

Proof. R_Q をとおして $(R,\mathfrak{m})$ local, $Q=\mathfrak{m}$ としてよい. $\dim R/P=1$ より $f\in\mathfrak{m}\backslash P$ をとると $\dim R/P+fR=0$. $\mathfrak{a}:=P+fR$ とおくと

$$0\longrightarrow R/P\xrightarrow{\ \widehat{f}\ }R/P\longrightarrow R/\mathfrak{a}\longrightarrow 0$$

より

$$\operatorname{Ext}^i_R(R/P,M)\xrightarrow{\widehat{f}}\operatorname{Ext}^i_R(R/P,M)\to\operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{a},M)$$

をうる. よって $\operatorname{Ext}^i_R(R/P,M)\neq(0)\Rightarrow\operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{a},M)\neq(0)$. あとは $\ell=\ell_R(R/\mathfrak{a})$ についての induction により $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{m},M)\neq(0)$ をうる. □

Corollary 3.1.13. $(0)\neq{}^\forall M\in\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $\dim_R M\leq\operatorname{id}_R M$.

Proof. $Q\in\operatorname{Supp}_R M$, $\operatorname{ht}_R Q=:n$ とする. $n\geq 0$ であって $^\exists(Q_0\subsetneq Q_1\subsetneq\cdots\subsetneq Q_n=Q)$ in $\operatorname{Supp}_R M$.
$\therefore Q_0\in\operatorname{Min}_R M\subseteq\operatorname{Ass}_R M$, $\mu^0(Q_0,M)>0$. $\therefore\mu^n(Q,M)>0$, $n\leq\operatorname{id}_R M$. $\therefore\dim_R M\leq\operatorname{id}_R M$. □

Proposition 3.1.14.
$(R,\mathfrak{m})$ *local* のとき $(0) \neq {}^{\forall}M \in \underline{\underline{M}}(R)$ についてもし $\mathrm{id}_R M < \infty$ ならば $\mathrm{id}_R M = \mathrm{depth}_R M$ である.

Remark 3.1.15. $(R,\mathfrak{m})$ *local* のとき $(0) \neq {}^{\exists}M \in \underline{\underline{M}}(R)$ *s,t* $\mathrm{id}_R M < \infty$ なら R は *a C-M local ring* であることがしられている.

Proof of Lemma. $t = \mathrm{depth}_R M$, $s = \mathrm{id}_R M$ とする. $f_1, \cdots, f_t \in \mathfrak{m}$ を an M-regular にとると $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_R R/I$ where $I = (f_1, \cdots, f_t)$. もちろん $0 \to R/\mathfrak{m} \to R/I \to X \to 0$ exact.

$$\therefore\ {}^{\forall}i \in \mathbb{Z},\ \ \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(X, M) \quad \textit{exact}.$$

ここで $\mathrm{hd}_R R/I = t$ となるのは Koszul cpx をとればよい.
まず $s \leq t$ を示す.
$\mathrm{E}_R^s(M) \neq (0)$ より ${}^{\exists}Q \in \mathrm{Spec}\, R$ s,t $\mu^s(Q, M) > 0$. 上の議論をみると $Q = \mathfrak{m}$ をうるので $\mathrm{Ext}_R^s(R/\mathfrak{m}, M) \neq (0)$. $\therefore s \leq t$.
これから $t \leq s$ を示す.
$t > 0$ として十分で R/I の Koszul cpx

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & R & \to & R^t & \to \cdots \to & R & \to & R/I \to 0 \\ & 1 & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ (-1)^{t-1} f_t \end{pmatrix} & & & & \end{array}$$

は, R/I の a min free resolution をあたえる. この cpx の M-dual は exact にはならない. つまり

$$M^t \xrightarrow{[f_1, \cdots, (-1)^{t-1} f_t]} M \longrightarrow 0$$

は完全でないことが, 中山の補題からわかる. $\therefore \mathrm{Ext}_R^t(R/I, M) \neq (0)$. $\therefore t \leq s$. $\therefore s = t$. □

Corollary 3.1.16. $(R,\mathfrak{m})$ *local* とする.

$$\mathrm{id}\, R < \infty. \Rightarrow R \text{ は } a\ C-M\ local\ ring \text{ であって } \dim R = \mathrm{id}\, R \text{ である.}$$

よって *a Gorenstein local ring* は *a C-M local ring* であることが示される.

Proposition 3.1.17. $(R,\mathfrak{m})$ *local,* $M \in \underline{\underline{M}}(R)$ とすると次は同値である.

(1) $\mathrm{id}_R M = \infty$.
(2) $\mu^i(\mathfrak{m}, M) > 0$ *for* ${}^{\forall}i \geq \dim R$.

Proof. (2)$\Rightarrow$(1) は自明. よって (1)$\Rightarrow$(2) を $d = \dim R$ についての induction で示す.
$d = 0$ ならば ${}^{\forall}i \geq 0$, $\mathrm{E}_R^i(M) \neq (0)$ で $\mu^i(\mathfrak{m}, M) > 0$ である.
$d > 0$, $\mathfrak{m} \neq {}^{\forall}Q \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathrm{id}_{R_Q} M_Q < \infty$ ならば ${}^{\forall}i > \mathrm{ht}_R Q$ について $\mu^i(Q, M) = 0$. $i \geq d$ とすると $\mathrm{E}_R^i(M) \neq (0)$ がしかし $Q \notin \mathrm{Ass}_R \mathrm{E}_R^i(M)$. $\therefore i > \mathrm{ht}_R Q$ for ${}^{\forall}\,\mathrm{Spec}\, R \backslash \{\mathfrak{m}\}$ より $\mu^i(\mathfrak{m}, M) > 0$.
$d > 0$, $\mathfrak{m} \neq {}^{\exists}Q \in \mathrm{Spec}\, R$ s,t $\mathrm{id}_{R_Q} M_Q = \infty$ ならば $n = \mathrm{ht}_R Q = \dim R_Q$, $s = \dim R/Q$ とおくと $n + s \leq d$ であって ${}^{\exists}(Q = Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_s = \mathfrak{m})$ in $\mathrm{Spec}\, R$. induction の仮定より

$$\mu^i(QR_Q, M_Q) > 0\ ({}^{\forall}i \geq n). \Leftrightarrow \mu^i(Q, M) > 0\ ({}^{\forall}i \geq n). \Rightarrow \mu^i(\mathfrak{m}, M) > 0\ ({}^{\forall}i \geq n + s).$$

$\therefore d \geq n + s$, $\mu^i(\mathfrak{m}, M) > 0$ $({}^{\forall}i \geq d)$. □

3.2 Gorenstein rings

ここでは, $(R, \mathfrak{m})$ は a Noetherian local ring, $d = \dim R$ とする.

Definition 22. *R が a Gorenstein local ring である.* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{id}_R R < \infty$.
このとき R は *a C-M local ring,* $\mathrm{id}_R R = d$ となる. もちろん $^\forall Q \in \operatorname{Spec} R$, R_Q も *a Gorenstein local ring* である.

Theorem 3.2.1. 次の条件は同値である.

(1) R は *a Gorenstein local ring* である.
(2) $\mu^i(\mathfrak{m}, R) = 0$ *for* $^\forall i > d$.
(3) $\mu^i(\mathfrak{m}, R) = 0$ *for* $^\exists i > d$.
(4) $\mu^i(\mathfrak{m}, R) = \delta_{i,d}$ $^\forall i \in \mathbb{Z}$.
(5) $\mu^i(Q, R) = \delta_{\mathrm{ht}_R Q, d}$ $^\forall i \in \mathbb{Z}$ $^\forall Q \in \operatorname{Spec} R$.

Proof. (1)⇒(2)⇒(3) は自明.
(5)⇒(4)⇒(3) も自明. ここで (1)⇒(4) をみとめると (1)⇒(5) も成立. (3)⇒(1) もほとんど明らか. よって (1)⇒(4) だけを示せば十分. まず $\mathrm{id}_R R = \dim R = \operatorname{depth} R = \min\{n \mid \operatorname{Ext}^n_R(R/\mathfrak{m}, R) \neq (0)\}$ より $\mu^i(\mathfrak{m}, R) = 0$ $^\forall i < d$. そして (1)⇒(2) より $\mu^i(\mathfrak{m}, R) = 0$ $^\forall i > d$. よって $\mu^d(\mathfrak{m}, R) = 1$ を d についての induction で示す. $d = 0$ なら $R \cong \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ より $\mu^0(\mathfrak{m}, R) = 1$ は明らか. $d > 0$ として $d - 1$ まで正しいとせよ. $f \in \mathfrak{m}$ を an R-regular にとると次の Lemma により R/fR は a Gorenstein local ring であって $\mu^{i+1}(\mathfrak{m}, R) = \mu^i(\mathfrak{m}, R)$ ($^\forall i \geq 0$) をうる. よって $\mu^d(\mathfrak{m}, R) = \mu^{d-1}(\mathfrak{m}/fR, R/fR) = 1$ をうる. □

Lemma 3.2.2. *$M \in R-\mathrm{mod}$ とせよ. そして $f \in \mathfrak{m}$ は an M-regular であってかつ an R-regular とする.*

$$\mu^{i+1}(\mathfrak{m}, M) = \mu^i(\mathfrak{m}/fR, M/fM) \quad \textit{for } {}^\forall i \geq 0.$$

Proof. $0 \to M \to E$ を M の a min injective resolution とする. そして $\overline{M} := M/fM$ とおく.
まず $^\forall E$ R-injective について $0 \to R \xrightarrow{\widehat{f}} R \to R/fR \to 0$ から

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R/fR, E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R, E) \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(R, E) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (0) \underset{E}{:} f \arrow[r] & E \arrow[r, "\widehat{f}"] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

をうる. 一方で $0 \to M \xrightarrow{\widehat{f}} M \to \overline{M} \to 0$ をとる. $\operatorname{Ass}_R M = \operatorname{Ass}_R \mathrm{E}^0_R(M)$ から f は an $\mathrm{E}^0_R(M)$-regular で

もあるので

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & (0)\underset{\mathrm{E}^0}{:}f \arrow[r, "\exists\alpha^{1\prime}"] \arrow[d] & (0)\underset{\mathrm{E}^1}{:}f \arrow[r, "\exists\alpha^{2\prime}"] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \mathrm{E}^0 \arrow[r, "\alpha^0"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \mathrm{E}^1 \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \mathrm{E}^2 \arrow[r, "\alpha^2"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & \mathrm{E}^0 \arrow[r, "\alpha^0"] \arrow[d] & \mathrm{E}^1 \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d] & \mathrm{E}^2 \arrow[r, "\alpha^2"] \arrow[d] & \cdots \\
 & \overline{M} & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

これから ${}^{\forall}i \geq 1$, $X^i := (0)\underset{\mathrm{E}^i}{:}f$ とおく．ここで

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \mathrm{E}^0 \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}^0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & \overline{M} & 0 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{M} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}"] \arrow[d] & X^1 \arrow[r, "\alpha^{1\prime}"] \arrow[d] & X^2 \arrow[r, "\alpha^{2\prime}"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \mathrm{E}^1 \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \mathrm{E}^2 \arrow[r, "\alpha^2"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & \mathrm{E}^1 \arrow[r, "\alpha^1"] & \mathrm{E}^2 \arrow[r, "\alpha^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

から $\overline{R}$-exact; $0 \to \overline{M} \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} X^1 \xrightarrow{\alpha^{1\prime}} X^2 \xrightarrow{\alpha^{2\prime}} \cdots$ がとれる．この完全列について

(1) X^i は $\overline{R}$-injective. (${}^{\forall}i \geq 1$.)
(2) $\alpha^{i\prime}$ は $\overline{R}$-essential. (${}^{\forall}i \geq 1$.)
(3) $\overline{\varepsilon}$ は $\overline{R}$-essential.

を示す．まず (1) については $\mathrm{E}^i = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(R/Q_\gamma)$ where $Q_\gamma \in \operatorname{Spec} R$ とかくと

$$X^i \cong \operatorname{Hom}_R(R/fR, \mathrm{E}^i) \cong \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{Hom}_R(R/fR, \mathrm{E}(R/Q_\gamma)) \cong \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}_{R/fR}(Q_\gamma/fR)$$

となることから明らか．次に (2) を示そう．$0 \neq x \in X^{i+1}$ をとる．$x \neq 0$ in E^{i+1} より $0 \neq {}^{\exists}a \in R$ s,t $0 \neq ax = \alpha^i(y)$ for some $y \in \mathrm{E}^i$. $\widehat{f}(ax) = fax = 0$ より $\alpha^i \cdot \widehat{f}(y) = \alpha^i(fy) = fax = 0$ となるので ${}^{\exists}z \in \mathrm{E}^{i-1}$ s,t $\alpha^{i-1}(z) = fy$. $\widehat{f}$ は onto なので $z = fu$ ${}^{\exists}u \in \mathrm{E}^{i-1}$, $v := \alpha^{i-1}(u)$ とおくと $\widehat{f}(y-v) = 0$, $\alpha^i(y-v) = ax$ である．$\therefore \alpha^{i\prime}(y-v) = ax$ in X^{i+1} となり $\alpha^{i\prime}$ は essential である．
(3) を示す．$0 \neq x \in X^1$ をとると，$0 \neq {}^{\exists}a \in R$ s,t $0 \neq ax = \alpha^0(y)$ for some $y \in \mathrm{E}^0$. $0 = fax = \widehat{f}(ax) = \widehat{f} \cdot \alpha^0(y) = \alpha^0(fy)$ となるので ${}^{\exists}m \in M$ s,t $\varepsilon(m) = fy$. $\therefore \overline{\varepsilon}(\overline{m}) = ax$. $\therefore \overline{\varepsilon}$ は essential.

よって $\overline{R}$-exact; $0 \to \overline{M} \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} X^1 \xrightarrow{\alpha^{1\prime}} X^2 \xrightarrow{\alpha^{2\prime}} \cdots$ は $\overline{M}$ の a min $\overline{R}$-injective resolution となる．そして

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{R}/\mathfrak{m}\overline{R}, X^{i+1}) &\cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{R}/\mathfrak{m}\overline{R}, \mathrm{Hom}_R(\overline{R}, \mathrm{E}^{i+1})) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(\overline{R}/\mathfrak{m}\overline{R}, \mathrm{E}^{i+1}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \mathrm{E}^{i+1})\end{aligned}$$

をみて $\mu^i(\mathfrak{m}/fR, M/fM) = \mu^{i+1}(\mathfrak{m}, M)$ をうる． □

Corollary 3.2.3. *$f \in \mathfrak{m}$ が an R-regular とすると, R が a Gorenstein local ring であることの必要十分条件は R/fR が a Gorenstein local ring である．*

Lemma 3.2.4. *$d = 0$ のときは*

$$R \text{ は } a \text{ Gorenstein local ring である．} \Leftrightarrow \ell_R\left((0) \underset{R}{:} \mathfrak{m}\right) = 1. \ (\Leftrightarrow (0) \text{ は irreducible in } R).$$

Proof. ($\Leftarrow$) のみ． $\mathrm{E} := \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ とおく． $(0) \underset{R}{:} \mathfrak{m} \subset R$ は essential なので $\mathrm{E}_R(R) \cong \mathrm{E}$. ここで $\ell_R(\mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{E})) = \ell_R(X)$ for ${}^\forall X \in R - \mathrm{mod}$ が成立するので $\ell(R) = \ell(\mathrm{E})$ を用いて $R \cong \mathrm{E}$ となる． □

Lemma 3.2.5. *$d = 0$, $\mathrm{E} := \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ とすると $\ell_R(X) = \ell_R(\mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{E}))$ for ${}^\forall X \in \underline{\underline{M}}(R)$. とくに $\ell(R) = \ell(\mathrm{E})$ である．*

Proof. $\ell = \ell(X)$ とおく． $\ell = 1$ ならば $X \cong R/\mathfrak{m}$ である． $\ell > 1$ なら $0 \to R/\mathfrak{m} \to X \to Y \to 0$ を用いよ． □

Theorem 3.2.6. 次は同値である．

(1) *R は a Gorenstein local ring である．*
(2) *R は a C-M local ring で ${}^\exists \mathfrak{q}$ irreducible parameter ideal in R.*
(3) *R は a C-M local ring で ${}^\forall \mathfrak{q}$ parameter ideal は irreducible.*

一度, 次の補題を用意しよう．

Lemma 3.2.7. *A a ring, $(0) \neq M \in A - \mathrm{mod}$ のとき*

$$\mathrm{E}_A(M) \text{ が indecomposable.} \Leftrightarrow X, Y \subseteq M \ A-\text{submodules について } X \cap Y = (0) \text{ なら } X = (0) \text{ or } Y = (0).$$

Proof. ($\Rightarrow$) のみで十分． $0 \to X \to M$ より $0 \to \mathrm{E}_A(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{E}_A(M)$. $X \neq (0)$ なら α は bijective.
$\therefore X \cap Y = (0)$, $Y = (0)$. □

定理を証明しよう． 上の補題より $d = 0$ のときは (0) が R 内で indecomposable であることと $\ell_R\left((0) \underset{R}{:} \mathfrak{m}\right) = 1$ は同値である． 実際, (0) が R 内で indecomposable であるなら $\mathrm{E}_R(R)$ は直既約であるから $\mathrm{E}_R(R) \cong \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$. $\therefore 1 = \mu^0(\mathfrak{m}, R) = \ell_R\left((0) \underset{R}{:} \mathfrak{m}\right)$. 逆に $\ell_R\left((0) \underset{R}{:} \mathfrak{m}\right) = 1$ とすると R は a Gorenstein local ring で $R \cong \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$. $\therefore R \cong \mathrm{E}_R(R)$ で直既約． よって $d = 0$ のときは上の定理は正しい． $d > 0$ なら $d = 0$ に帰着せよ．

Theorem 3.2.8. $(R, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (S, \mathfrak{n})$ は *flat local* とする．このとき

$$S \text{ は } a\ Gornstein\ local\ ring \text{ である}. \Leftrightarrow R, S/\mathfrak{m}S \text{ は } Gorenstein\ local\ rings \text{ である}.$$

Proof. S は a C-M local ring として十分．そして R-regular sequence で割って $\dim R = 0$ として十分である．$\dim S/\mathfrak{m}S > 0$ なら $f \in \mathfrak{n}$ を an $S/\mathfrak{m}S$-regular にとれば f は an S-regular で, $R \to S/fS$ は flat であったので $\dim S = 0$ としてよい．$\ell := \ell_R\left((0) \underset{R}{:} \mathfrak{m}\right)$ とすると

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{n}, S) &\cong \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{n}, \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{m}S, S)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{n}, S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, R)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{n}, (S/\mathfrak{m}S)^{\ell}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{n}, S/\mathfrak{m}S)^{\ell}. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S \text{ が } a\ Gorenstein\ local\ ring. \Leftrightarrow \ell = 1 \text{ であってかつ } S/\mathfrak{m}S \text{ は } a\ Gorenstein\ local\ ring.$$

□

Definition 23. *A が a Gorenstein ring である．$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A は a Noetherian ring であって A_Q は a Gorenstein local ring, for $^{\forall}Q \in \mathrm{Spec}\, A$.*

Corollary 3.2.9. *R が a Gorenstein ring ならば $R[X_1, \cdots, X_n]$ も a Gorenstein ring である．*

Remark 3.2.10. *R が a RLR ならもちろん R は a Gorenstein local ring である．*
これは $\mathrm{gl.dim}\, R < \infty$ ならば $\mathrm{id}\, R < \infty$ による．

第4章　Matlis duality

4.1　Matls duality

$(R, \mathfrak{m})$ Noeth local とし $\mathrm{E} = \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})$ とする．

Lemma 4.1.1. $X \in R-\mathrm{mod}$ について $\mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{E}) = (0)$. $\Leftrightarrow X = (0)$.

Proof. $(\Rightarrow)$ のみを示す．$\mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{E}) = (0)$ しかし $X \neq (0)$ とする．$(0) \neq {}^\forall Y \subseteq X$, $0 \to Y \to X \to X/Y \to 0$ は exact なので $\mathrm{Hom}_R(Y, \mathrm{E}) = (0)$. よって $(0) \neq X \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ にとれる．${}^\exists exact;\ X \to R/\mathfrak{m} \to 0$. $\therefore \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \mathrm{E}) = (0)$ となり矛盾． □

Lemma 4.1.2. $(0) \underset{R}{:} \mathrm{E} = (0)$.

Proof. $f \in R$ で $f\,\mathrm{E} = (0)$ とすると，${}^\forall i > 0$, $\mathrm{Ass}_R\, R/\mathfrak{m}^i = \{\mathfrak{m}\}$ より $\mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m}^i) \cong \overbrace{\mathrm{E} \oplus_R \mathrm{E} \oplus_R \cdots \oplus_R \mathrm{E}}^{n\ times}$ $(n > 0)$. $\therefore f \cdot (R/\mathfrak{m}^i) = (0)$ for ${}^\forall i > 0$, $f \in \mathfrak{m}^i$ $({}^\forall i > 0)$. $\therefore f \in \bigcap_{i>0} \mathfrak{m}^i = (0)$. □

Lemma 4.1.3. $\widehat{R} \otimes_R \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m}) \cong \mathrm{E}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}})$ *in* $\widehat{R}-\mathrm{mod}$.

Proof. $(R, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ は flat local であったので

$$\mathrm{Ass}_{\widehat{R}}\, \widehat{R} \otimes_R \mathrm{E} = \bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}_R \mathrm{E}} \mathrm{Ass}_{\widehat{R}}\, \widehat{R}/Q\widehat{R} = \mathrm{Ass}_{\widehat{R}}\, \widehat{R}/\mathfrak{m}\widehat{R} = \{\widehat{\mathfrak{m}}\}$$

をうる．また

$$(0) \underset{\widehat{R}}{:} \widehat{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}, \widehat{R} \otimes_R \mathrm{E}) \cong \widehat{R} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \mathrm{E}) \cong \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}$$

より $\ell_{\widehat{R}}\left((0) \underset{\widehat{R}}{:} \widehat{\mathfrak{m}}\right) = 1$ をうる．よって後は $\widehat{R} \otimes_R \mathrm{E}$ が $\widehat{R}$-injective だけを示せばよい．しかしこれは

$$\mu^i(\widehat{\mathfrak{m}}, \widehat{R}) = \mu^i(\mathfrak{m}, R) \qquad {}^\forall i \in \mathbb{Z}$$

より明らかである． □

これより，しばらくは *faithfully flat* についての議論をする．それらの証明は良い *Exercise* になりうると思われるので，各個人に委ねることとしよう．

Definition 24. A は可換環とする．$(0) \neq M \in A-\mathrm{mod}$ について

M は $a\ faithfully\ flat\ A-module$ である．
$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$
M は $A-flat$ であって，かつ $N \in A-\mathrm{mod}$ について $M \otimes_R N = (0)$ なら $N = (0)$.

Lemma 4.1.4. $M \in A-\mathrm{mod}$ について次の条件は同値である．

(1) M は *a faithfully flat A-module* である．
(2) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \cdots (*)$ と $M \otimes_R X \xrightarrow{M \otimes_R f} M \otimes_R Y \xrightarrow{M \otimes_R g} M \otimes_R Z \cdots (**)$ について，
$(*)$ は *exact* である．$\Leftrightarrow$ $(**)$ は *exact* である．
(3) M は *A-flat* かつ $M \neq \mathfrak{m}M$ *for* ${}^{\forall}\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$.

よって，もし $(A, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (B, \mathfrak{n})$ が *flat local* ならば B は *a A-faithfully flat* である．

Corollary 4.1.5.
$A \to B$ は *faithfully flat* とする．このとき $(0) \neq {}^{\forall}M \in A-\mathrm{mod}$, $M \to B \otimes_A M$ は *injection*.

Corollary 4.1.6. $A \to B$ は *faithfully flat* とする．もし B が *Noetherian* ならば A も *Noetherian* である．

Proposition 4.1.7. $\mathrm{E} \xrightarrow{\varphi} \widehat{R} \otimes_R \mathrm{E}$, $e \mapsto 1 \otimes_R e$ は *bijective.*

Proof. $h : R \to \widehat{R}$ とかく．h は faithfully flat なので φ の単射性は明らか．${}^{\forall}\alpha \in \widehat{R}$, ${}^{\forall}e \in \mathrm{E}$ をとる．${}^{\exists}n > 0$ s,t $\mathfrak{m}^n e = (0)$．一方で，$\widehat{R} \otimes_R R/\mathfrak{m}^n \cong \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$．$\therefore \overline{\alpha} = \overline{h(a)}$ for some $a \in R$ in $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$．$\therefore \alpha - h(a) = \beta$ for some $\beta \in \widehat{\mathfrak{m}}^n$ in $\widehat{R}$. $\beta = m\gamma$ ($m \in \mathfrak{m}^n$, $\gamma \in \widehat{R}$) とかけるので

$$\alpha \otimes_R e = h(a) \otimes_R e + \beta \otimes_R e = h(a) \otimes_R e = a \cdot 1_{\widehat{R}} \otimes_R e = a\varphi(e) = \varphi(ae)$$

より全射も確かめられた． □

Theorem 4.1.8. $R = \widehat{R}$ とする．$R \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Hom}_R(\mathrm{E}, \mathrm{E})$, $a \mapsto \widehat{a}$ は同型射である．

Proof. $(0) \underset{R}{:} \mathrm{E} = (0)$ より単射はあきらか．φ が全射であることを $d = \dim R$ についての induction で示す．$d = 0$ ならば $\ell(R) = \ell(\mathrm{E}) < \infty$ より求まる．$d > 0$ とする．そして ${}^{\forall}i > 0$, $A_i := (0) \underset{\mathrm{E}}{:} \mathfrak{m}^i$ とおく．${}^{\forall}f \in \operatorname{Hom}_R(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ は $A_i \to A_i$ for ${}^{\exists}i > 0$ へ制限できる．この A_i については

$$A_i = (0) \underset{\mathrm{E}}{:} \mathfrak{m}^i \cong \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, \mathrm{E}) \cong \mathrm{E}_{R/\mathfrak{m}^i}(R/\mathfrak{m}) \qquad {}^{\forall}i > 0$$

となり，$d = 0$ の場合をみると ${}^{\forall}f \in \operatorname{Hom}_R(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ をとると ${}^{\exists 1}\alpha_n = \overline{a_n} \in R/\mathfrak{m}^n$ s,t ${}^{\forall}n > 0$, ${}^{\forall}x \in A_n$ に対して $f(x) = \alpha_n x = a_n x$．よって $\alpha_n x = \alpha_{n+1} x$ in A_n である．$\therefore \overline{a_n} = \overline{a_{n+1}}$ in $R/\mathfrak{m}^n$．$\therefore a_n - a_{n+1} \in \mathfrak{m}^n$．従って，$(a_1, \cdots, a_n, \cdots,) \subseteq R$ は ${}^{\forall}n > 0$ を一つとり固定すると ${}^{\forall}i \geq n$ に対して $a_n - a_i \in \mathfrak{m}^n$ をみたすので ${}^{\exists 1}\alpha \in R$ s,t $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$.

よって後は $\varphi(\alpha) = f$ だけを示せば良い．
${}^{\forall}e \in \mathrm{E}$ をとると，${}^{\exists}n > 0$ s,t $e \in A_n$．$\therefore f(e) = a_n e$．一方で，$\varphi(\alpha)(e) = \widehat{\alpha}(e) = \alpha e$ であったので $\alpha e = a_n e$ を示せば十分．これは $\overline{\alpha} = \overline{a_n}$ in $R/\mathfrak{m}^n$ を示せばよくて，実際そうなっている．それは，$a_n \to \alpha$ であったから ${}^{\exists}k_n > 0$ s,t ${}^{\forall}\ell \geq k_n$ に対して $a_\ell - \alpha \in \mathfrak{m}^n$．一方で $a_s - a_n \in \mathfrak{m}^n$ for ${}^{\forall}s \geq n$ であったから $u := \max\{k_n, n\}$ とすると ${}^{\forall}v \geq u$, $a_y - a_n, a_v - \alpha \in \mathfrak{m}^n$．$\therefore \alpha - a_n \in \mathfrak{m}^n$. □

Lemma 4.1.9. ${}^{\forall}M \in R-\mathrm{mod}$, $0 \to M \to M^{**}$ *exact where* $M^* := \operatorname{Hom}_R(M, \mathrm{E})$.

Theorem 4.1.10 (Matlis duality). $R=\widehat{R}$, $\underline{\underline{\mathrm{D}}} := \{X | X$ は *Artinian* $R-mod\}$, $M^* := \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{E})$ *for* $^\forall M \in R-\mathrm{mod}$ とすると

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R) \arrow[rr, leftrightarrow, "1\ to\ 1"] & & \underline{\underline{\mathrm{D}}}(R) \\
M \arrow[rr, mapsto] & & M^* \\
L^* & & L \arrow[ll, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

は *category* の同値を与える.

Proof. $^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ をとり $0 \to X \to \underset{f,g\ free}{F} \to M \to 0$ exact をとると, $0 \to M^* \to F^* \to X^* \to 0$ は exact. よって $\mathrm{E} \in \underline{\underline{\mathrm{D}}}(R)$ なら $M^* \in \underline{\underline{\mathrm{D}}}(R)$; E が Artinian であることを確かめよう.
E 内に $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots$ をつくると

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & E_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & E_i \arrow[r] \arrow[d] & E_i/E_{i+1} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{E} \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{E} \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{E}/E_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}/E_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

をうる．よってこの可換図より

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{E}/E_i)^* \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{E}^* \arrow[d, equal] & \cong R \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{E}/E_{i+1})^* \arrow[r, "\rho_{i+1}"] \arrow[d] & \mathrm{E}^* & \\
 & (E_i/E_{i+1})^* \arrow[d] & & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

をうる．ここで $\mathfrak{a}_i := \operatorname{Im}\rho_i$ ($^\forall i \geq 1$) とおくと $\mathfrak{a}_i$ は R の ideal であって, かつ $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \cdots$ をみたしている．$\therefore$ $^\exists i > 0$ s,t $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i+1} = \cdots$. $\therefore$ $(E_i/E_{i+1})^* = (0)$ より $E_i = E_{i+1} = \cdots$ をうる．よって E は Artinian である．さて $^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $M \overset{h_M}{\mapsto} M^{**}$ を the canonical map とすると

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "h_X"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "h_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^{**} \arrow[r] & F^{**} \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

より常に h_M は onto であって, そのことから h_M は bijection であることがわかる．

$^\forall L \in \underline{\underline{\mathrm{D}}}(R)$ をとると $0 \leq n = \ell_R\left((0) \underset{L}{:} \mathfrak{m}\right) < \infty$ (体論) である．$(0) \underset{L}{:} \mathfrak{m} \subseteq L$; essential より $L \subseteq \mathrm{E}_R(L) = \underbrace{\mathrm{E} \oplus \mathrm{E} \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}}_{n\ times}$. $^\exists exact$; $0 \to L \to \mathrm{E}^n \to X \to 0$ $n \geq 1$. $\therefore$ $0 \to X^* \to (\mathrm{E}^*)^n \to L^* \to 0$ は exact なので $L^* \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ であって, さらに

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "h_L"'] & \mathrm{E}^n \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "h_X"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L^{**} \arrow[r] & (\mathrm{E}^n)^{**} \arrow[r] & X^{**} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

を見て h_L は bijective. □

第5章　Local cohomology

5.1　Local cohomology

$n > 0$, $\underline{f} = f_1, \cdots, f_n \in R$ とし $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ とおく． F を *a f,g free* R-module として $\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ を F の a fixed free basis とせよ． $^\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{F}_p = \{I | I \subseteq \Lambda,\ |I| = p\}$ とおき $\mathcal{F}_p \ni I$ をとったとき $T_I := T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_p}$ $(= T_{i_1} \wedge T_{i_2} \wedge \cdots \wedge T_{i_p};$ *in* $\bigwedge^p F)$ where $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\}$ とおく．勿論, $\mathcal{F}_p = \emptyset$ if $p < 0$ or $n < p$ である．又, $^\forall i \in \mathbb{Z}$, $\bigwedge F \supseteq \bigwedge^i F$ と取り扱う． $\mathrm{K}_\cdot(\underline{f}) = \mathrm{K}_\cdot(\underline{f}; R)$ とする．

Lemma 5.1.1. $\varphi : R \to S$ を *a homomorphism of rings* とすると

$$\mathrm{K}_\cdot(\underline{f}) \otimes_R S \cong \mathrm{K}_\cdot\left(\underline{\varphi(f)}; S\right) \qquad \textit{as cpx in } S-\mathrm{mod}\,.$$

Remark 5.1.2. これは, $S \otimes_R \bigwedge F \cong \bigwedge (S \otimes_R F)$ の形で述べるほうがよいのかもしれない.

Proof. $L = S \otimes_R F$, $\alpha : F \to L;\ f \mapsto 1 \otimes_R f$ とする． $F \xrightarrow{\alpha} L \hookrightarrow \bigwedge L$ は an R-linear map であってかつ $\alpha(f)^2 = (1 \otimes_R f)(1 \otimes_R f) = 0$ in $\bigwedge F$.

$$\therefore \quad \begin{tikzcd} \bigwedge F \arrow[r, "^{\exists 1}\beta"] & \bigwedge L \\ F \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & L \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \quad \textit{an } R-\textit{algebra map} \quad s,t \quad .$$

$$\therefore \quad \begin{tikzcd} S \otimes_R \bigwedge F \arrow[rr, "^{\exists 1}\gamma"] & \circlearrowleft & \bigwedge L \\ & \bigwedge F \arrow[ul] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \quad \textit{an } S-\textit{algebra map} \quad s,t \quad .$$

一方で, $j := S \otimes_R i : L = S \otimes_R F \to S \otimes_R \bigwedge F$ は an S-linear map であるから

$$\therefore \quad \begin{tikzcd} \bigwedge L \arrow[rr, "^{\exists 1}\rho"] & \circlearrowleft & S \otimes_R \bigwedge F \\ & L \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \quad \textit{an } S-\textit{algebra map} \quad s,t \quad .$$

このとき, γ は ρ を逆写像とする bijection map である. 実際

$$
{}^\forall f\in R,\quad
\begin{array}{ccccc}
S\otimes_R \bigwedge F & \xrightarrow{\gamma} & \bigwedge L & \xrightarrow{\rho} & S\otimes_R \bigwedge F \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
1\otimes_R f & \mapsto & 1\otimes_R f & \mapsto & 1\otimes_R f
\end{array}
$$

による. 更に ${}^\forall p\in\mathbb{Z}$ に対して $S\otimes_R \bigwedge^p F := \left[S\otimes_R \bigwedge F\right]_p$, $\gamma\left([S\otimes_R \bigwedge F]_p\right) = \bigwedge^p L$ である. そして

$$
{}^\forall p\in\mathbb{Z},\quad
\begin{tikzcd}
S\otimes_R \bigwedge^p F \arrow[r, "S\otimes_R \partial"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S\otimes_R \bigwedge^{p-1} F \arrow[d, "\wr"'] \\
\bigwedge^p L \arrow[r, "\partial"] & \bigwedge^{p-1} L
\end{tikzcd}
$$

となることをたしかめる. $1\leq p\leq n$ として十分であって

$$
\begin{tikzcd}
1\otimes_R T_I \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & 1\otimes_R \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha+1} f_{i_\alpha} T_{I\setminus\{i_\alpha\}}\right) \arrow[d, mapsto] \\
(1\otimes_R T_{i_1})\cdots(1\otimes_R T_{i_p}) \arrow[r, mapsto] & \sum_\alpha (-1)^{\alpha+1}\varphi(f_{i_\alpha})(1\otimes_R T_{i_1})\cdots(\widehat{1\otimes_R T_{i_\alpha}})\cdots(1\otimes_R T_{i_p})
\end{tikzcd}
$$

をうる. □

Theorem 5.1.3. $a_1,\cdots,a_n\in R$ として $A=[a_{ij}]\in\mathrm{M}(R)$ をとる. そして

$$
\xi=\widehat{A}:\
\begin{array}{ccc}
F & \longrightarrow & F \\
\Cup & & \Cup \\
T_j & \mapsto & \sum_{i=1}^n a_{ij}T_i
\end{array}
\quad \text{をつくり} \quad s,t \quad
\begin{tikzcd}
\bigwedge\xi:\ \bigwedge F \arrow[r] & \bigwedge F \\
F \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
\quad \textit{the } R-\textit{algebra map}
$$

とすると, $b_j := \sum_{i=1}^n a_{ij}a_i$ *for* $1\leq {}^\forall j\leq n$ について $\bigwedge\xi : \mathrm{K}.(b_1,\cdots,b_n;R)\to\mathrm{K}.(a_1,\cdots,a_n;R)$ は *a homomorphism of comlexes in* $R-\mathrm{mod}$ となる. とくに $A\in\mathrm{GL}_n(R)$ なら $\bigwedge\xi$ は *bijection* であるから *isomorphism* をうる.

Proof.

$$
\begin{tikzcd}
\bigwedge F \arrow[r, "\bigwedge\xi"] \arrow[d, "\partial_{\underline{b}}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \bigwedge F \arrow[d, "\partial_{\underline{a}}"] \\
\bigwedge F \arrow[r, "\bigwedge\xi"] & \bigwedge F
\end{tikzcd}
$$

を示す. まずは

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "{[b_1,\cdots,b_n]}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[dl, "{[a_1,\cdots,a_n]}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

をみよ. 次に

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^{p} F \arrow[r, "\bigwedge \xi"] \arrow[d, "\partial_{\underline{b}}"] & \bigwedge^{p} F \arrow[d, "\partial_{\underline{a}}"] \\ \bigwedge^{p-1} F \arrow[r, "\bigwedge \xi"] & \bigwedge^{p-1} F \end{tikzcd}$$

をみるに, $1 \leq p \leq n$ で $I \in \mathcal{F}_p$ をとると

$$\begin{tikzcd} T_I \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \xi(T_{i_1})\cdots\xi(T_{i_p}) \arrow[d, dotted, "?"] \\ \sum_{\alpha}(-1)^{\alpha+1} b_{i_\alpha} T_{i_1}\cdots\widehat{T_{i_\alpha}}\cdots T_{i_p} \arrow[r, mapsto] & \sum_{\alpha}(-1)^{\alpha+1} b_{i_\alpha}\xi(T_{i_1})\cdots\widehat{\xi(T_{i_\alpha})}\cdots\xi(T_{i_p}) \end{tikzcd} .$$

ところが, $\mathrm{K}.(a_1,\cdots,a_n;R)$ 内では $p,q\in\mathbb{Z}$, $f\in\mathrm{K}_p$, $g\in\mathrm{K}_q$ としたとき

$$\partial(f\cdot g) = \partial f\cdot g + (-1)^p f\cdot\partial g$$

が成立する. 確かめるにはまともに調べるしかないが, $f \neq 0$, $g \neq 0$ として良くて, さらに $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$ として十分で, $0 < p$, $0 < q$ としてよい. そして $I\in\mathcal{F}_p$, $J\in\mathcal{F}_q$ をとり $f = T_I$, $g = T_J$ として十分. このとき p についての induction で示すことにして $p = 1$ のときは, 既に証明してある. よって $1 < p$ として $p - 1$ まで正しいとせよ. すると $f = T_m h$ としてよいから

$$\begin{aligned} \partial\left((T_m h)g\right) &= \partial T_m\cdot hg - T_m\partial(hg) = a_m - T_m\partial(hg) \\ &= a_m(hg) - T_m\left[\partial h\cdot g + (-1)^{p-1}h\partial g\right] \\ &= a_m hg - T_m\partial h\cdot g + (-1)^p T_m h\partial g \\ &= (a_m h - T_m\partial h)\cdot g + (-1)^p f\partial g \\ &= \partial f\cdot g + (-1)^p f\partial g \end{aligned}$$

となる. 但し $p = 1$ のときは $q\in\mathbb{Z}$, $g\in\mathrm{K}_q$ とすると $q < 0$ なら正しい. $n < q$ なら $\partial(g)\in\bigwedge^{p-1}F$ で $q = p + q - 1 \geq n + 1$ で正しいことに注意する必要がある.

$$\therefore\quad \partial\left(\xi(T_{i_1})\cdots\xi(T_{i_p})\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+1}\partial\left(\xi(T_{i_\alpha})\right)\xi(T_{i_1})\cdots\widehat{\xi(T_{i_\alpha})}\cdots\xi(T_{i_p}).$$

よって $b_{i_\alpha} = (\xi(T_{i_\alpha}))$ for $^\forall\alpha \cdots (*)$ だけを示せばよい．これは

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "{[b_1, \cdots, b_n]}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[dl, "{[a_1, \cdots, a_n]}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

であったので $^\forall j$ について

$$\begin{tikzcd} T_j \arrow[rr, mapsto, "\xi"] \arrow[dr, "{[b_1, \cdots, b_n]}"'] & & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i \arrow[dl, "{[a_1, \cdots, a_n]}"] \\ & b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_i & \end{tikzcd}$$

をみて $(*)$ をうる． □

Lemma 5.1.4. $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ *for* $^\forall M \in R-\mathrm{mod}$ とする．

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \to 0 \to & \mathrm{K}_0^* & \to & \mathrm{K}_1^* & \to \cdots \to & \mathrm{K}_p^* & \to \cdots \to & \mathrm{K}_n^* & \to 0 \to \cdots \\ & & & & \uparrow\wr & & & & \\ \cdots \to 0 \to & \mathrm{K}_n & \to & \to & \mathrm{K}_{n-1} & \to \cdots \to & \to \cdots \to & \mathrm{K}_0 & \to 0 \to \cdots \end{array}$$

$$as\ cpx\ in\ R-\mathrm{mod}.$$

Proof. $^\forall I \in \Lambda$ に対して $I^c := \Lambda \backslash I$ とする．そして $I \in \mathcal{F}_{n-p}$, $(0 \leq p \leq n)$ に対して $I = \{i_1 < \cdots < i_{n-p}\}$, $I^c = \{j_1 < \cdots < j_p\}$ としたとき

$$\sigma(I) := sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-p & n-p+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_{n-p} & j_1 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$$

とする．今 $^\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{array}{cccc} \xi: & \mathrm{K}_{n-p} & \longrightarrow & \mathrm{K}_p^* \\ & \cup & & \cup \\ & T_I & \mapsto & \sigma(I)(T_{I^c})^* \end{array}$$

とする．このときの $(T_{I^c})^*$ は T_I の R-dual basis である．もちろん $p < 0$ or $n < p$ ならば $\xi = 0$ と定める．すると $0 \leq p \leq n-1$ では

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}_{n-p} \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\partial"] & \mathrm{K}_p^* \arrow[d, "\partial^*"] \\ \mathrm{K}_{n-p-1} \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{K}_{p+1}^* \end{tikzcd}$$

は

$$\begin{array}{ccc} T_I = T_{i_1}\cdots T_{i_{n-p}} & \xmapsto{\quad\quad\xi\quad\quad} & \sigma(I)\left(T_{I^c}\right)^* \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n-p}(-1)^{\alpha+1}f_{i_\alpha}T_{i_1}\cdots\widehat{T_{i_\alpha}}\cdots T_{i_{n-p}} & \xrightarrow{\quad\xi\quad} & \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n-p}(-1)^{\alpha+1}f_{i_\alpha}\left[\sigma(I\backslash\{i_\alpha\})T_{(I\backslash\{i_\alpha\})^c}\right]^* \end{array}$$

となる. 今 $\partial^*\left(T_{I^c}\right)^*\in\mathrm{K}_{p+1}$ を良く見るに $J=\{j_1<\cdots<j_{p+1}\}\in\mathcal{F}_{p+1}$ について

$$\begin{aligned}\left\langle\partial^*\left(T_{I^c}\right)^*, T_J\right\rangle &= \left\langle\left(T_{I^c}\right)^*, \partial T_J\right\rangle \\ &= \left\langle\sigma(I)\left(T_I\right)^*, \sum_{\beta=1}^{p+1}(-1)^{\beta+1}f_{j_\beta}T_{J\backslash\{j_\beta\}}\right\rangle \\ &= \sum_{\beta=1}^{p+1}(-1)^{\beta+1}f_{j_\beta}\left\langle\left(T_{I^c}\right)^*, T_{J\backslash\{j_\beta\}}\right\rangle \\ &= \sigma(I)\sum_{\beta=1}^{p+1}(-1)^{\beta+1}f_{j_\beta}\delta_{I^c,(J\backslash\{j_\beta\})} \quad \cdots(\#).\end{aligned}$$

一方で,

$$\left\langle\sum_{\alpha=1}^{n-p}(-1)^{\alpha+1}f_{i_\alpha}\left[\sigma(I\backslash\{i_\alpha\})T_{(I\backslash\{i_\alpha\})^c}\right]^*, T_J\right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{n-p}(-1)^{\alpha+1}f_{i_\alpha}\sigma(I\backslash\{i_\alpha\})\delta_{(I\backslash\{i_\alpha\})^c,J} \quad \cdots(\#\#).$$

よってもし $1\leq{}^\forall\beta\leq p+1$ について $J\backslash\{j_\beta\}\neq I^c$ ならば, $(\#)=0$; そのときは $1\leq{}^\forall\alpha\leq n-p$ をとっても $(I\backslash\{i_\alpha\})^c\neq J$ である. 実際 $1\leq{}^\exists\alpha\leq n-p$ s,t $(I\backslash\{i_\alpha\})^c=J$ ならば $(I\backslash\{i_\alpha\})\cup J=\Lambda$ で $(I\backslash\{i_\alpha\})\cap J=\emptyset$; よって $i_\alpha\in J$; ${}^\forall x\in I^c$, $x\in\Lambda\backslash I$. $\therefore x\in J$ で $x\neq i_\alpha$. $\therefore x\in J\backslash\{i_\alpha\}$. $\therefore I^c\subseteq J\backslash\{i_\alpha\}\Rightarrow I^c=J\backslash\{i_\alpha\}$. (矛盾)
$\therefore(\#\#)=0$.

もし $1\leq{}^\exists\beta\leq p+1$ s,t $I^c=J\backslash\{j_\beta\}$ であれば, $1\leq\gamma\leq p+1$ を $I^c=J\backslash\{j_\gamma\}$ にとると $j_\beta\notin I^c$ ので $j_\beta\notin J\backslash\{j_\gamma\}$. $\therefore j_\beta\in\{j_\gamma\}$. $\therefore\beta=\gamma$. $\therefore 1\leq{}^{\exists 1}\beta\leq p+1$; $I^c=J\backslash\{j_\beta\}$. このとき $j_\beta\in I$ より $1\leq{}^{\exists 1}\alpha\leq n-p$ s,t $j_\beta=i_\alpha$; すると ${}^\forall x\in I\backslash\{i_\alpha\}$, $x\in I$ and $x\neq i_\alpha$. $\therefore x\notin I^c$ より $x\in J\backslash\{i_\alpha\}$. $\therefore x\notin J$. $\therefore I\backslash\{i_\alpha\}\subseteq J^c$.
$\therefore J\subseteq(I\backslash\{i_\alpha\})^c$. $\therefore J=(I\backslash\{i_\alpha\})^c$. 上と同様にして $1\leq{}^{\exists 1}\alpha\leq n-p$ s,t $J=(J\backslash\{i_\alpha\})$.
勿論, $i_\alpha=j_\beta$ である.

$\therefore(\#)=\sigma(I)\cdot(-1)^{\beta+1}f_{j_\beta}$, $(\#\#)=\sigma(I\backslash\{i_\alpha\})\cdot(-1)^{\alpha+1}f_{i_\alpha}$ となり, ここで

$$\rho := \begin{pmatrix}1 & & \cdots & & n-p & n-p+1 & & \cdots & & n \\ i_1 & \cdots & \underset{\substack{\| \\ j_\beta}}{i_\alpha} & \cdots & i_{n-p} & j_1 & \cdots & j_{\beta-1} & j_{\beta+1} & \cdots & j_{p+1}\end{pmatrix}$$

$$\eta := \begin{pmatrix}1 & & \cdots & & & n-p-1 & n-p & & \cdots & & n \\ i_1 & \cdots & i_{\alpha-1} & i_{\alpha+1} & \cdots & i_{n-p} & j_1 & \cdots & \underset{\substack{\| \\ i_\alpha}}{j_\beta} & \cdots & j_{p+1}\end{pmatrix}$$

とおくと, $\sigma(\eta)=\sigma(\rho)\cdot(-1)^{n-p-\alpha+\beta-1}$ であるから

$$(\#)=(-1)^{\alpha+1}\sigma(I\backslash\{i_\alpha\})f_{i_\alpha}=(-1)^{\alpha+1}\sigma(\eta)f_{i_\alpha}=(-1)^{\alpha+1}\sigma(\rho)\cdot(-1)^{n-p-\alpha+\beta-1}f_{j_\beta}=(-1)^{n-p-1}\cdot(\#\#)$$

をうる. $\therefore (\#)=\partial^*(\xi(T_I))=(-1)^{n-p-1}\xi(\partial(T_I))$. よって, $0\leq {}^\forall p\leq n$ に対して

$$\begin{array}{ccccc}\xi_p & : & \mathrm{K}_p & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{K}^*_{n-p}\\ & & \Cup & & \Cup\\ & & T_I & \mapsto & \sigma(I)\,(T_{I^c})\end{array}$$

とするとき $1\leq {}^\forall p\leq n$ に対して

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}_p \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\xi_p"', "\wr"] & \mathrm{K}_{p-1} \arrow[d, "\xi_{p-1}"', "\wr"] \\ \mathrm{K}^*_{n-p} \arrow[r, "\partial^*"] & \mathrm{K}^*_{n-p+1} \end{tikzcd},$$

$$\partial^*(\xi_p(T_I))=(-1)^{p-1}\xi_{p-1}(\partial(T_I))\qquad {}^\forall I\in\mathcal{F}_p.$$

よって

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{K}_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{K}_3 \arrow[r] \arrow[d, "-"'] & \mathrm{K}_2 \arrow[r] \arrow[d, "-"'] & \mathrm{K}_1 \arrow[r] \arrow[d, "+"'] & \mathrm{K}_0 \arrow[r] \arrow[d, "+"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{K}^*_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{K}^*_{n-3} \arrow[r] & \mathrm{K}^*_{n-2} \arrow[r] & \mathrm{K}^*_{n-1} \arrow[r] & \mathrm{K}^*_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ここで

$$\varepsilon_p=\begin{cases}1 & p\equiv 0,1 \pmod 4\\ -1 & otherwise\end{cases}$$

として $\varphi_p=\varepsilon_p\xi_p$ for ${}^\forall p\in\mathbb{Z}$ とするとうまくゆく. □

$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ とし, $0<m\leq\ell$ とすれば

$$\begin{bmatrix} f_1^\ell\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n^\ell\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1^{\ell-m} & & & \\ & \cdot & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & \cdot & \\ & & & f_n^{\ell-m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} f_1^m\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n^m\end{bmatrix}$$

である. よって

$$\begin{array}{ccccc}\rho_{m,\ell} & : & \mathrm{K}_\cdot(\underline{f}^\ell) & \longrightarrow & \mathrm{K}_\cdot(\underline{f}^m)\\ & & \Cup & & \Cup\\ & & T_I & \mapsto & \left(\prod_{i\in I}f_i\right)^{\ell-m}T_I\end{array}$$

が与えられて従って ${}^{\forall}M{\in}R-\mathrm{mod}$ に対して $\mathrm{K}_{\cdot}(f^{\ell};M)$ を

$$\cdots \to 0 \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_0(f^{\ell}),M) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^{\ell}),M) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_n(f^{\ell},M)) \to 0 \to \cdots$$

と定めれば

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^{\ell}),M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+1}(f^{\ell}),M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+2}(f^{\ell}),M) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^{m}),M) \arrow[r] \arrow[u, "\rho^*_{m,\ell}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+1}(f^{m}),M) \arrow[r] \arrow[u, "\rho^*_{m,\ell}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+2}(f^{m}),M) \arrow[r] \arrow[u, "\rho^*_{m,\ell}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

となり, ${}^{\forall}p{\in}\mathbb{Z}$ について an inductive system $\left\{\mathrm{H}^p\left(\underline{f}^{\ell};M\right),\rho^*_{m,\ell}\right\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ が得られる. このとき

Definition 25.

$$\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(M) := \varinjlim_{\ell} \mathrm{H}^p\left(\underline{f}^{\ell};M\right) \quad \mathit{for}\ {}^{\forall}M{\in}R-\mathrm{mod}$$

をうる. 次が正しい.

Lemma 5.1.5.

(1) $\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(\ ) : R-\mathrm{mod} \to R-\mathrm{mod},\ M \mapsto \mathrm{H}^p_{\underline{f}}(M)$ は *a functor* (${}^{\forall}p{\in}\mathbb{Z}$) であって, $\mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(M),\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(N)\right)$, $\alpha \mapsto \alpha_* := \mathrm{H}^p_{\underline{f}}(\alpha)$ は *an R-linear map* (${}^{\forall}M,N{\in}R-\mathrm{mod}$) である.

(2) ${}^{\forall}$*exact*; $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して ${}^{\exists}$*a long exact sequence in* $R-\mathrm{mod}$ *s,t*
$\cdots \to \mathrm{H}^0_{\underline{f}}(X) \to \mathrm{H}^0_{\underline{f}}(Y) \to \mathrm{H}^0_{\underline{f}}(Z) \xrightarrow{\Delta} \cdots \to \mathrm{H}^p_{\underline{f}}(X) \to \mathrm{H}^p_{\underline{f}}(Y) \to \mathrm{H}^p_{\underline{f}}(Z) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^{p+1}_{\underline{f}}(X) \to \cdots$.
そしてこの Δ は *exact sequence* に対して *natural* である.

(3) $\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(\ ) = 0$ *if* $p<0$ *or* $n<p$.

Proof. (1) ${}^{\forall}p{\in}\mathbb{Z}$, $\alpha : M \to N$ an R-linear map を与えると $0<m\le\ell$ について

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^{\ell}),M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+1}(f^{\ell}),M) \arrow[dd] \\
\mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^{m}),M) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+1}(f^{m}),M) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^{\ell}),N) \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+1}(f^{\ell}),N) \\
\mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^{m}),N) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_{p+1}(f^{m}),N) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は全て可換である．よって

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}^{\cdot}\left(\underline{f}^m; M\right) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\rho_{m,\ell}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{K}^{\cdot}\left(\underline{f}^m; N\right) \arrow[d, "\rho_{m,\ell}"'] \\
\mathrm{K}^{\cdot}\left(\underline{f}^\ell; M\right) \arrow[r, "\alpha_*"] & \mathrm{K}^{\cdot}\left(\underline{f}^\ell; N\right)
\end{tikzcd}$$

をうる．あとは省く．

(2) K_p は f,g free より

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^\ell), X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^\ell), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_p(f^\ell), Z) \longrightarrow 0$$

が exact による．Δ の naturality は力づくで確かめよ．

(3) は自明. □

Definition 26. $^\forall\mathfrak{a} \subseteq R$ *an ideal* について

$$\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M) := \varinjlim_{\ell} \mathrm{Ext}^p_R(R/\mathfrak{a}^\ell, M)$$

とおく．

Lemma 5.1.6.

(1) $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(\ ) : R-\mathrm{mod} \to R-\mathrm{mod},\ M \mapsto \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M)$ は *a functor* ($^\forall p{\in}\mathbb{Z}$) であって，$\mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M), \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(N)\right)$, $\alpha \mapsto \alpha_* := \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ は *an R-linear* ($^\forall M, N{\in}R-\mathrm{mod}$) である．

(2) $^\forall$*exact*; $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して $^\exists$*a long exact sequence in* $R-\mathrm{mod}$ *s,t*
$\cdots \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(X) \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(Y) \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(Z) \xrightarrow{\Delta} \cdots \to \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(X) \to \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(Y) \to \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(Z) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^{p+1}_{\mathfrak{a}}(X) \to \cdots$.
そしてこの Δ は *exact sequence* に対して *natural* である．

(3) $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(\ ) = 0$ *if* $p < 0$.

証明はまともにすればできるので省く．

Corollary 5.1.7. $M{\in}R-\mathrm{mod}$ とする．M が *R-injective* ならば $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M) = (0)$ *for* $^\forall p > 1$.

Proof. M が R-injective $\Rightarrow \mathrm{Ext}^p_R(X, M) = (0)$ for $^\forall p > 1$, $^\forall X{\in}R-\mathrm{mod}$ より明らか. □

Remark 5.1.8. $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ を M の *an injective resolution* とし

$$0 \to M \to I^0 \to X \to 0$$
$$0 \to X \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

と分解する．このとき

$$\mathcal{C}:\ \cdots \to 0 \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^0) \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^1) \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^2) \to \cdots$$

をつくれば

$$\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^p(\mathcal{C}) \qquad {}^\forall p{\in}\mathbb{Z}$$

である．これは,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(M) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|\wr"] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^0) \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(X) \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(M) \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(I^0) \arrow[d, phantom, "\|"] \\ & \mathrm{H}^0(\mathcal{C}) & & & & (0) \end{tikzcd}$$

をみて $p \leq 0$ で正しいことがわかる．

$0 < p$

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(M) \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^0) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(M) \arrow[r] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^0) \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^1) \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^2) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

より $\mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^1(\mathcal{C})$ をうる．$2 \leq p$ ならば

$$\mathcal{C}' : \quad 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^1) \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^2) \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^3) \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^4) \longrightarrow \cdots$$

とおくと *induction* の仮定より $\mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(X) \cong \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{C}')$ であるから

$$\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(X) \cong \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{C}') = \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{C})$$

となる．

よって, これからは主に $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{H}^p(\cdots \to \cdots \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(I^i) \to \cdots)$ の形で用いることにする．

Lemma 5.1.9. $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ ならば $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(\ ) \cong \mathrm{H}^0_{\underline{f}}(\ )$ *as functors.*

Proof. ${}^{\forall}M \in R - \mathrm{mod}$, $\mathrm{H}^0\left(\underline{f}; M\right)$ は

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R, M) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{K}_1(f^{\ell}), M) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & (0) \underset{M}{:} (f_1^{\ell}, \cdots, f_n^{\ell}) \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] & M^n \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \qquad {}^{\forall}\ell > 0 \quad .$$

ただし
$$\begin{array}{cccc} \varphi : & M & \longrightarrow & M^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & m & \mapsto & \begin{bmatrix} f_1^{\ell} m \\ \vdots \\ f_n^{\ell} m \end{bmatrix} \end{array}$$
とする．

これより $\mathrm{H}^0_{\underline{f}}(M) \cong \bigcup_{\ell>0} (0) \underset{M}{:} (f_1^\ell, \cdots, f_n^\ell)$ as functor をうる．一方で

$$\bigcup_{\ell>0} (0) \underset{M}{:} (f_1^\ell, \cdots, f_n^\ell) = \bigcup_{\ell>0} (0) \underset{M}{:} \mathfrak{a}^\ell \cong \varinjlim_{\ell} \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^\ell, M) \quad \textit{in } M.$$

□

Theorem 5.1.10. *R が Noetherian であれば $^\forall E \in R-\mathrm{mod}$, injective に対して $\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(E) = (0)$ for $^\forall p > 0$.*

Proof. $\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(\ )$ は任意の直和と可換である．よって $E = \mathrm{E}_R(R/Q)$ for some $Q \in \mathrm{Spec}\, R$ として十分．$\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ とおく．もし $\mathfrak{a} \not\subseteq Q$ ならば $f_i \notin Q$ ($^\exists i$)．このとき f_i は E に同型に作用し，一方で point wise に f_i の冪は $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(E)$ の元を消す．$\therefore \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(E) = (0)$ for $^\forall p$.
次に，$\mathfrak{a} \subseteq Q$ としよう．$^\forall x \in \mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M)$ は，ある元 $z \in \mathrm{Z}^p\left(\underline{f}^\ell; M\right)$ for some $\ell > 0$ の the limit map の像であらわせる．ところが

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \to & \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_p\left(\underline{f}^\ell\right), M\right) & \to & \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_{p+1}\left(\underline{f}^\ell\right), M\right) & \to \cdots \\ & \cup & & \cup & \\ & z & \mapsto & 0 & \end{array}$$

であった．もちろん $0 < p \leq n$ としてよいので，$Z(T_I) =: e_I \in E$ は $\mathfrak{a} \subseteq Q$ より $^\exists m > 0$; $\mathfrak{a}^m e_I = (0)$, $^\forall I \in \mathcal{F}_p$．よって

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_p\left(\underline{f}^\ell\right), E\right) & \ni & z \\ \downarrow{\scriptstyle \xi^*} & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_p\left(\underline{f}^{\ell+m}\right), E\right) & \ni & z \cdot \xi \end{array}$$

は $^\forall I \in \mathcal{F}_p$, $(z \cdot \xi)(T_I) = z\left(\left(\prod_{i\in I} f_i\right)^m T_I\right) = \left(\prod_{i\in I} f_i\right)^m e_I = 0$, since $p > 0$. $\therefore z \cdot \xi = 0$. □

Theorem 5.1.11. *R は Noetherian, $\mathfrak{a} \subseteq R$ an ideal とする．*
$\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(\underline{f})}$. $\Rightarrow$ $^\forall M \in R-\mathrm{mod}$, $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{a}}(M) \underset{canon}{\cong} \mathrm{H}^p_{\underline{f}}(M)$ in $R-\mathrm{mod}$ ($^\forall p \in \mathbb{Z}$).

Proof. $p \leq 0$ までは正しい．$p > 0$ として $p-1$ 以下まで正しいとする．$M, N \in R-\mathrm{mod}$, $\alpha : M \to N$ an R-linear map をとる．このとき

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & J & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

where I, J; $R-$injective, $X, Y \in R-\mathrm{mod}$.

がとれ, この可換図より

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(I) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(X) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{H}^{p}_{\mathfrak{a}}(M) \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
\mathrm{H}^{p-1}_{\underline{f}}(I) \arrow[ur] \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & \mathrm{H}^{p-1}_{\underline{f}}(X) \arrow[ur] \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & \mathrm{H}^{p}_{\underline{f}}(M) \arrow[ur] \arrow[r, crossing over] \arrow[dd] & 0 & \\
& \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(J) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^{p-1}_{\mathfrak{a}}(Y) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^{p}_{\mathfrak{a}}(N) \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{H}^{p-1}_{\underline{f}}(J) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{H}^{p-1}_{\underline{f}}(Y) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{H}^{p}_{\underline{f}}(N) \arrow[ur] \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

が得られ, この可換図をみればよい. $\square$

Theorem 5.1.12. $\varphi : R \to S$ *a homomorphism of rings* とするとき, ${}^\forall X{\in}S-\mathrm{mod}$ について

$$\mathrm{H}^p_{\underline{f}}(X) \cong \mathrm{H}^p_{\underline{\varphi(f)}}(X) \quad \textit{as } S-\textit{modules} \quad {}^\forall p{\in}\mathbb{Z}.$$

Proof. $\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_p\left(\underline{f}\right), X\right) \cong \mathrm{Hom}_S\left(S \otimes_R \mathrm{K}_p\left(\underline{f}\right), X\right)$ in $S-\mathrm{mod}$ であって $S \otimes_R \mathrm{K}_\cdot\left(\underline{f}\right) \cong \mathrm{K}_\cdot\left(\varphi\left(\underline{f}\right); S\right)$ による. $\square$

さて各論に入ろう. 以下, $(R, \mathfrak{m})$ を a Noetherian local ring とする. 示したいことは

Theorem 5.1.13. $(0) \neq {}^\forall M{\in}\underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ ならば

$$
\begin{aligned}
\dim_R M &= \max\left\{ i{\in}\mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq (0) \right\}, \\
\mathrm{depth}_R M &= \min\left\{ i{\in}\mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq (0) \right\}.
\end{aligned}
$$

Proof. $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ を M の a min injective resolution とする. $t = \mathrm{depth}_R M$ とおく. すると $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) = (0)$ for ${}^\forall i < t$, $\mathrm{Ext}^t_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq (0)$ であった. 今, $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{H}^p(\cdots \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \to \cdots)$ であった. よって $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(E^i) = (0)$ for $({}^\forall i < t)$ より $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ for $({}^\forall i < t)$ である. 一方で,

$$
\begin{array}{ccccc}
\cdots \to 0 \to & \mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{t+1}_{\mathfrak{m}}(M) & \to \cdots \\
& \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subset$} & \\
& (0) :_{E^t} \mathfrak{m} & \mapsto & 0 & \\
& \nparallel & & & \\
& (0) & & &
\end{array}
$$

を見て, $\mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) \neq (0)$ をうる.

次に, $d = \dim_R M$ とおく.
$I = (0) \underset{R}{:} M$ とおき $R \to R/I =: S$ をみると $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}(M)^i(M) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}/I}(M)$ as S-modules. $\therefore d = \dim R$ として十分. $\therefore \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ for ${}^\forall i > d$. よって後は $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq (0)$ を示せば良い. $d > 0$ としてよい. そして, $\widehat{R}$ をとおして $R = \widehat{R}$ としてよい. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R M$ をとり $0 \to \mathfrak{p}M \to M \to M/\mathfrak{p}M \to 0$ exact をとると, $\dim_R M/\mathfrak{p}M = d$. $\therefore \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) \neq (0)$ をいうのみ. よって R は an integral domain として十分.
$\therefore {}^\exists P \underset{finite}{\subseteq} R$ s,t P は a RLR. よって, R は a RLR としてよい. そして, 更に

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow 0,$$

$$where \quad T(M) := \left\{ x \in M \,\middle|\, (0) \neq (0) \underset{R}{:} x \right\}.$$

を見るに $\dim_R M/T(M) = d$ をみたす. よって, $M/T(M)$ をとおして M は torsion free と思ってよい. $K := \mathbb{Q}(R) \supseteq R$ とおくと, $(0) \neq K \otimes_R M$ より

$${}^\exists exact;\ 0 \to F \to M \quad s,t\ \ \mathrm{rank}_R M = \dim_K K \otimes_R M = n > 0,\ F \text{ は } f,g\ free.$$

$$\therefore \quad {}^\exists exact; 0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

$\therefore X \neq (0)$ であったとしても $\dim_R X < d$. $\therefore \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(M) \to \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(F) \to 0$ exact, そして $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(F) \cong \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)^\alpha$ for some $\alpha > 0$. よって, $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R) \neq (0)$ だけを示せばよいのだが, これは R が a Gorenstein local ring であるので自明なことである. □

Remark 5.1.14. ${}^\forall M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$, $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}}(M)$ は *an Artinian* である. (${}^\forall p \in \mathbb{Z}$)

Proof. $p > 0$ として十分.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E}^p_R(M) & & & & \\ \cup\!\!| & & & & \\ \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{E}^p_R(M)) & \to & \mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}}(M) & \to & 0 \qquad \alpha \geq 0 \\ \wr\!\!| & & & & \\ \mathrm{E}_R(R/\mathfrak{m})^\alpha & & & & \end{array}$$

による. □

Proposition 5.1.15. R は必ずしも *local* でない *Noetherian* とする. $I \subseteq R$ *an ideal,* $M \in \underline{\underline{\mathrm{M}}}(R)$ *s,t* $M \neq IM$. そして $n = \mathrm{grade}(I, M)$ とすると

$$n = \min \left\{ i \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{H}^i_I(M) \neq (0) \right\}.$$

Proof. $(n = 0)$ $(0) \neq \mathrm{Hom}_R(R/I, M) \subseteq \mathrm{H}^0_I(M)$ より明らか.
$(n > 0)$ $n-1$ まで正しいとする. ${}^\exists f \in I$; an M-regular element. $\overline{M} := M/fM$ とおくと $\mathrm{grade}(I, \overline{M}) = n-1$ であって

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\widehat{f}} M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0 \quad exact$$

から

$$\begin{array}{cccccc} 0 \to & \mathrm{H}_I^{n-1}(\overline{M}) & \to & \mathrm{H}_I^n(M) & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathrm{H}_I^n(M) \\ & \| & & & & \\ & (0) & & & & \end{array}.$$

$$\therefore \quad {}^\forall i < n, \qquad \begin{array}{cccc} 0 \to & \mathrm{H}_I^{i}(M) & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathrm{H}_I^i(M) \\ & \| & & \\ & (0) & & \end{array}.$$

□

第6章　Associated graded rings

6.1　Associated graded rings

$I \subsetneq R$ an ideal に対して $\mathcal{R}'(I) := R[It, t^{-1}] \subseteq R[t, t^{-1}]$ とし

$$G(I) := \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I)$$

とおき, I の the associated graded ring と呼ぶ. 示したいことは

Theorem 6.1.1. $I = (a_1, \cdots, a_s)$ $(s > 0)$ で $a_1, \cdots, a_s$ は *an R-regular sequence* をなすと仮定せよ. このとき

$$\varphi : R[X_1, \cdots, X_s] \to G(I) \quad the\ R-algebra\ map\ s,t\ \varphi(X_i) = \overline{a_i t} \quad 1 \leq {}^\forall i \leq s$$

は全射であって $\operatorname{Ker}\varphi = IB$ *where* $B = R[X_1, \cdots, X_s]$ となる.

以下, $s > 0$, $a_1, \cdots, a_s$ は an R-regular sequence をなすと仮定せよ. そして $I_i = (a_1, \cdots, a_i)$ for $1 \leq {}^\forall i \leq s$ とおく.

Lemma 6.1.2. $0 \leq {}^\forall i \leq s$, ${}^\forall n \in \mathbb{Z}$ について $I_i \cap I^n = I_i I^{n-1}$.

Proof. $(\supseteq)$ は自明. よって $(\subseteq)$ を n についての induction で示す. $n \leq 1$ では明らか. $n \geq 2$ として $n-1$ 以下で正しいとせよ. $i = s$ なら自明. よって $i < s$ として $i+1$ まで正しいとする. $f \in I_i \cap I^n$. $\Rightarrow$ $f \in I_{i+1} \cap I^n = I_{i+1} I^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad f \in I_i \cap I_{i+1} I^{n-1} &= I_i \cap \left[(I_i + (a_{i+1})) \cdot I^{n-1}\right] \\ &= I_i \cap \left[I_i \cdot I^{n-1} + a_{i+1} I^{n-1}\right] \\ &= I_i \cdot I^{n-1} + (a_{i+1} \cdot I_i) \cap I^{n-1}. \end{aligned}$$

$\therefore f = g + h$ $(g \in I_i \cdot I^{n-1},\ h \in (a_{i+1} \cdot I_i) \cap I^{n-1})$. よって, $h \in I_i \cdot I^{n-1}$ を示せばよい. $h = a_{i+1}\alpha$ $(\alpha \in I^{n-1})$ とかける. $\therefore \alpha \in (I_i : a_{i+1}) \cap I^{n-1} = I_i \cdot I^{n-2}$, $h \in I_i \cdot I^{n-2} \cdot a_{i+1} \subseteq I_i \cdot I^{n-1}$. □

Corollary 6.1.3. $a_1 t, \cdots, a_s t$ は *a* $G(I)$*-regular sequence* をなす.

Corollary 6.1.4. $\overline{R} := R/I_i R$, $\overline{I} := I \cdot \overline{R}$, $\varepsilon : R \to \overline{R}$ とおく.

$$\operatorname{Ker}\left(G(I) \to G(\overline{I})\right) = (a_1 t, \cdots, a_i t) \cdot G(I).$$

Proof. $i = 1$ のときだけを示せば十分. $a \in I^n$ $(n \geq 0)$ で $\overline{at^n} \mapsto 0$ とする. $a \in \left(a_1 R + I^{n+1}\right) \cap I^n = a_1 I^{n-1} + I^{n+1}$. $\therefore a = a_1 b + c\ {}^\exists(b \in I^{n-1},\ c \in I^{n+1})$. $\therefore \overline{at^n} = \overline{a_1 t \cdot bt^{n-1}}$. □

Proof of Theorem. s についての induction で示す．$s=1$ ならば, $n \geq 0$, $a \in R$ について $ax^n \overset{\varphi}{\mapsto} \overline{a(a_1t)^n} = \overline{aa_1^nt^n}$. $\therefore ax^n \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow aa_1^n \in I^{n+1} = a_1^nI$ より $a \in I$. もちろん, 一般に $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq IB$. $\therefore \operatorname{Ker}\varphi = IB$.
$s>1$ で $s-1$ まで正しいとする．$\overline{R} := R/a_1R$, $\overline{I} = I\overline{R}$ とおき, $\tau : B = R[X_1, \cdots, X_n] \to \overline{R}[X_2, \cdots, X_n] = \overline{B}$ the R-algebra map s,t $\tau(X_1)=0$ とすると $\operatorname{Ker}\tau = a_1B + X_1B$ である．ここで $\psi : \overline{B} \to G(\overline{I})$, $X_i \mapsto \overline{a_it}$ とおく．$a_2, \cdots, a_n$ は an $\overline{R}$-regular sequence をなすので induction から $\operatorname{Ker}\psi = \overline{IB}$ である．そして

$$\begin{CD} B @>{\tau}>> \overline{B} \\ @V{\varphi}VV \circlearrowleft @VV{\psi}V \\ G(I) @>{\varepsilon}>> G(\overline{I}) \end{CD}$$

となる．$f \in \operatorname{Ker}\varphi$ をとる．$0 = \varepsilon(\varphi(f)) = \psi(\tau(f))$, $\tau(f) \in \overline{IB}$. $\therefore f \in IB + X_1B$, $f = g + hX_1$ ${}^{\exists}(g \in IB,\ h \in B)$.
$\varphi(f)=0.\ \Rightarrow a_1t\varphi(h) = 0.\ \Rightarrow \varphi(h)=0.$

$$\therefore \quad \operatorname{Ker}\varphi = I\cdot B + X_1 \operatorname{Ker}\varphi.$$

もし $\operatorname{Ker}\varphi \neq I\cdot B$ ならば $I\cdot B \subsetneq \operatorname{Ker}\varphi$ より $\xi \in \operatorname{Ker}\varphi$ を $\xi \notin IB$ となる homogenious element であって, かつ minimal degree であるものとすると $\xi \in I\cdot B + X_1\operatorname{Ker}\varphi$ から $\xi = \xi' + X_1\xi''$ ${}^{\exists}(\xi' \in IB,\ \xi'' \in \operatorname{Ker}\varphi)$. これは, ξ の min degree に反する．よって $\operatorname{Ker}\varphi = IB$ をうる． □

Corollary 6.1.5. $(R, \mathfrak{m})$ を *a C-M local ring,* $d = \dim R > 0$ とする．${}^{\forall}$*sop* $a_1, \cdots, a_d$ *of* R に対して

$$\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)[X_1, \cdots, X_d] \xrightarrow{\ \sim\ } G(\mathfrak{q})$$

である．但し, $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ とする．逆も正しい．下の *Lemma* をみること．

Corollary 6.1.6. $(R, \mathfrak{m})$ は *a Noeth local ring,* $d = \dim R > 0$ とし, $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(n = \mu_R(\mathfrak{m}))$ とする．このとき

$$\begin{aligned} R \text{ は } aRLR \text{ である．} \quad \Leftrightarrow \quad & \varphi : (R/\mathfrak{m})[X_1, \cdots, X_n] \to G(\mathfrak{m}) \quad \textit{the } R/\mathfrak{m}-\textit{algebra map} \\ & \qquad s,t\ X_i \mapsto \overline{x_it} \quad (1 \leq {}^{\forall}i \leq n) \\ & \text{は } \textit{bijection} \text{ である．} \end{aligned}$$

下の形に一般化しよう．

Lemma 6.1.7. R は *Noetherian* で $I \subseteq \mathrm{J}(R)$ のときは上の定理は逆も正しい．すなわち,
$\operatorname{Ker}\varphi = I\cdot B.\ \Rightarrow a_1, \cdots, a_s$ は *an R-regular sequence* をなす．

Proof. s についての induction で証明する．$s=1$ まず, a_1t が a $G(I)$-regular であることを示そう．$\overline{at^n} \in [G]_n$ s,t $a_1t \cdot \overline{at^N} = 0$ をとる．$a \in (a_1^n) \Rightarrow a = ca_1^n$ for some $c \in R$. 今, $\varphi(cX_1^n + 1) = \overline{ca_1^{n+1}t^{n+1}} = \overline{aa_1t^{n+1}} = 0$ より $cX_1^{n+1} \in a_1B$. $\therefore c \in (a_1)$, $\overline{at^n} = 0$. $\therefore a_1t$ は a $G(I)$-regular.
すると, $a \in R$ をとり $aa_1 = 0$ であるとすれば, $\overline{aa_1t} = a_1t \cdot \overline{a} = 0 \Rightarrow a \in I$. しかし, $\overline{ata_1t} = \overline{aa_1t^2} = 0$ より $\overline{at} = 0$. $\therefore a \in I^2$. $\therefore a \in \bigcap_{\ell > 0} I^\ell = (0)$. $\therefore a_1$ は an R-regular.

$s > 1$ として $s-1$ 以下まで正しいとする.
$B = R[X_1, \cdots, X_n]$, $\overline{R} = R/a_1R$, $\overline{I} = I\overline{R}$, そして $\overline{B} = \overline{R}[X_2, \cdots, X_n]$ として

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & & \overline{B} \arrow[d, "\psi"] \\ G(I) \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & G(\overline{I}) \end{tikzcd}$$

であった. これから $\operatorname{Ker}\varphi = IB$ を仮定して $\operatorname{Ker}\psi = \overline{IB}$ を証明しよう. もし, これが正しいならば $a_2, \cdots, a_n$ は induction の仮定から an R/a_1R-regular sequence をなすことがわかるので $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は an R-regular sequence をなす. $\square$

Lemma 6.1.8. $\operatorname{Ker}\varphi = IB. \Rightarrow \operatorname{Ker}\psi = \overline{IB}.$

Proof. $\operatorname{Ker}\psi \supseteq \overline{IB}$ は明らか. $f \in \operatorname{Ker}\psi$ とすると, $f = \tau(g)$ for some $g \in B$ とかける. $0 = \psi(f) = \varepsilon(\varphi(g))$ となるが, 上で示したように a_1t は a $G(I)$-regular なので $\operatorname{Ker}\varepsilon = a_1tG(I)$ である. $\therefore \varphi(g) = a_1t \cdot \overline{h}$ for some $h \in B$. $\therefore g = X_1h + h'$ ${}^{\exists}h' \in IB$. $\therefore f = \tau(g) = \tau(h') \in \overline{IB}$. $\square$

第7章　Serre の条件について

7.1　Serre の条件 (S_n) について

R は a Noetherian とする.

Definition 27. $n\in\mathbb{Z}$ とするとき

R が (S_n) をみたす. $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $^{\forall}Q\in\operatorname{Spec}R,\ \operatorname{depth}R_Q\geq\min\{n,\ \dim R_Q\}$.
R が (R_n) をみたす. $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $Q\in\operatorname{Spec}R$ が $\dim R_Q\leq n$ であるならば R_Qは *a RLR* である.

Lemma 7.1.1. 次の条件は同値である.

(1) R は *reduced* である (i,e $\sqrt{(0)}=(0)$).
(2) R は $(\mathrm{S}_1)+(\mathrm{R}_0)$ をみたす.

Proof. (2)⇒(1) $^{\forall}Q\in\operatorname{Ass}R,\dim R_Q=0$ であるので R_Q は体である. $^{\forall}x\in\sqrt{(0)}$, $\frac{x}{1}=0$ in R_Q. $\therefore (0)\underset{R}{:}x\not\subseteq Q$ であるから $^{\exists}a\in R$ s,t $a\notin\bigcup\limits_{Q\in\operatorname{Ass}R}Q$; $ax=0$. $\therefore x=0$ で R は reduced である.
(1)⇒(2) $^{\forall}Q\in\operatorname{Spec}R$, $^{\exists}P\in\operatorname{Min}R$ s,t $P\subseteq Q$. $\therefore \bigcap\limits_{P\in\operatorname{Min}R}P=(0)$. $|\operatorname{Min}R|<\infty$ であったので, $0\to R\to\bigoplus\limits_{Q\in\operatorname{Min}R}Q$ exact. $\therefore \operatorname{Ass}R=\operatorname{Min}R$.

$$\operatorname{depth}R_Q=0.\Leftrightarrow Q\in\operatorname{Ass}R.\Leftrightarrow Q\in\operatorname{Min}R\Leftrightarrow\dim R_Q=0.$$

よって R は (S_1) をみたす. $Q\in\operatorname{Ass}R$ とすると, $0\to R_Q\to R_Q\otimes_R\bigoplus\limits_{Q\in\operatorname{Min}R}Q=R_Q/QR_Q$ exact.
$\therefore R_Q$ は体である. □

Remark 7.1.2. R が (S_2) をみたし, かつ *an integral domain,* $\dim R\geq 1$ であるならば,

$$\bigcap_{Q\in\mathrm{H}_1(R)}R_Q=R\qquad in\ \mathbb{Q}(R)$$

である. 但し, $\mathrm{H}_1(R)=\{Q\in\operatorname{Spec}R|\operatorname{ht}_R Q=1\}$ とする. 今の場合 $\mathrm{H}_1(R)\neq\emptyset$ である.

Proof. $x\in\bigcap\limits_{Q\in\mathrm{H}_1(R)}R_Q$ をとり $x=\frac{b}{a}$ とかくとき, $\mathfrak{a}=\{\alpha\in R|x\alpha\in R\}$ とおくと $\mathfrak{a}=aR\underset{R}{:}b$ であって $0b\to R/\mathfrak{a}\to R/aR$ exact, $\overline{1}\mapsto\overline{b}$. よって, もし $x\notin R$ ならば $R\neq\mathfrak{a}$ で $^{\exists}Q\in\operatorname{Ass}_R R/\mathfrak{a}$. $\therefore Q\in\operatorname{Ass}_R R/aR$ より $\operatorname{depth}R_Q=1$. $\therefore 0<\dim R_Q\leq 1$ より $Q\in\mathrm{H}_1(R)$. しかし $^{\exists}s\in R\backslash Q$ $(s\in\mathfrak{a})$; $sx\in R$ となり矛盾. □

Corollary 7.1.3. *R が a C-M domain,* $\dim R > 0$. $\Rightarrow \bigcap_{Q \in \mathrm{H}_1(R)} R_Q = R$ *in* $\mathbb{Q}(R)$.

Lemma 7.1.4. *R は an integral domain とするとき*

$$R = \overline{R} \text{ in } \mathbb{Q}(R). \Leftrightarrow R \text{ は } (\mathrm{S}_2) + (\mathrm{R}_1) \text{ をみたす.}$$

Proof. いずれにしても $\dim R > 0$ として十分.
$(\Leftarrow)$ $\bigcap_{Q \in \mathrm{H}_1(R)} R_Q = R$ *in* $\mathbb{Q}(R)$. ${}^\forall Q \in \mathrm{H}_1(R)$ について R_Q は a RLR であるから R_Q は a DVR.
$\therefore \overline{R} \subseteq \bigcap_{Q \in \mathrm{H}_1(R)} R_Q = R$.
$(\Rightarrow)$ ${}^\forall Q \in \operatorname{Spec} R$ s,t $\mathrm{ht}_R Q \leq 1$ をとる．このときは $\mathrm{ht}_R Q = 1$ のときだけをみて R_Q が DVR であればよい．$R = \overline{R}$ より $R_Q = \overline{R_Q}$, $\dim R_Q = 1$ であるから R は確かに DVR である．よって R は (R_1) をみたし, かつ R_Q は a RLR if $\mathrm{ht}_R Q \leq 1$ であることがわかった．よって後は, $\mathrm{ht}_R Q \geq 2$ について調べれば良い．それは, 下の補題で直接証明をあたえておく． □

Lemma 7.1.5. $(R, \mathfrak{m})$ は *a local domain,* $\dim R \geq 2$ とすると

$$R = \overline{R} \text{ in } \mathbb{Q}(R). \Rightarrow \operatorname{depth} R \geq 2.$$

Proof. $K = \mathbb{Q}(R) \supseteq R$ とするとき, もし $\operatorname{depth} R \leq 1$ ならば $0 \neq {}^\forall a \in \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R/aR$. $\therefore \mathfrak{m} = aR :_R b$ for some $b \in R$. $\therefore b\mathfrak{m} \subseteq aR \subseteq \mathfrak{m}$. よって ${}^\forall r \in \mathfrak{m}$ をとると $br = as$ for ${}^\exists s \in R$. ここで $L = \{\ell \in K | \ell\mathfrak{m} \subseteq R\} \ni \frac{b}{a}$ とおくと, $\mathfrak{m}L \subsetneq R$ ideal である．これは, もし $1 \in \mathfrak{m}L$ とすれば $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_n)$ とかいたとき ${}^\exists \ell_i \in L$ s,t $1 = x_1\ell_1 + \cdots x_n\ell_n$. よって

$$\begin{array}{ccccccccccc} f & : & R^n & \longrightarrow & \mathfrak{m} & \qquad & g & : & \mathfrak{m} & \longrightarrow & R^n \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & (r_i) & \mapsto & \sum r_i x_i & & & & x & \mapsto & (x\ell_i) \end{array}$$

とおくと $f \cdot g = id_{\mathfrak{m}}$ をみたす．$\therefore \mathfrak{m}$; f,g R-projective $\Rightarrow \mathfrak{m}$; free, $\mu_R(\mathfrak{m}) = 1 \Rightarrow \dim R \leq 1$. (矛盾) ${}^\forall \ell \in L$, $\widehat{\ell} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ an R-linear をみるに ℓ は R 上 inregral であるから $L \subseteq \overline{R} = R$. $\therefore \frac{b}{a} \in R$, $b \in aR \Rightarrow 1 \in aR :_R b = \mathfrak{m}$. (矛盾) $\therefore \operatorname{depth} R \geq 2$. □

この証明は次の内容を含んでいる．

Lemma 7.1.6. $(R, \mathfrak{m})$ は *a local ring,* $\dim R = 1$ (*resp.* $\dim R \geq 2$.) とする．

$$R = \overline{R} \text{ in } \mathbb{Q}(R) =: K. \Rightarrow \mu_R(\mathfrak{m}) = 1. \quad (\textit{resp.} \quad \operatorname{depth} R \geq 2.)$$

Proof. $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ をとると $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R/aR$. $\mathfrak{m} = aR :_R b$ とかくと $\frac{b}{a} \in L := \{\ell \in K | \ell\mathfrak{m} \subseteq R\}$. L は K の an R-submodule で $\mathfrak{m}L \subseteq R$. もし $\mathfrak{m}L \subsetneq R$ ならば $\mathfrak{m}L \subseteq \mathfrak{m}$ より $L \subseteq \overline{R} = R$. $\therefore \frac{b}{a} \in R$, $1 \in aR :_R b = \mathfrak{m}$(矛盾) $\therefore \mathfrak{m}L = R$, $\mathfrak{m} \in \underline{\underline{\mathrm{P}}}(R)$. $\therefore \mathfrak{m}$ は free. $\therefore \mu_R(\mathfrak{m}) = 1$. □

Definition 28.

$$R \text{ は } normal \text{ である.}$$
$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$^{\exists}\{R_1, \cdots, R_n\} \quad n > 0,\ R_i \text{は } North, \text{整閉整域}, s,t\ R \cong R_1 \times \cdots \times R_n \quad as\ rings$$

Theorem 7.1.7. *R が normal である. $\Leftrightarrow$ R は $(\mathrm{S}_2) + (\mathrm{R}_1)$ をみたす.*

Proof. $(\Rightarrow)$ $S = R_1 \times \cdots \times R_n$ とすると $^{\forall}Q \in \operatorname{Spec} R$, $Q = R_1 \times \cdots \times P_i \times \cdots \times R_n$ $^{\exists 1}\{1 \le i \le n;\ P_i \in \operatorname{Spec} R_i\}$. このとき $S_Q \cong R_{i P_i}$ as rings である.
$(\Leftarrow)$ R は reduced である. よって

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & R & \xrightarrow{\varphi} & \prod_{Q \in \operatorname{Min} R} R/Q & \to & C & \to 0 \quad exact \\ & \cup & & \cup & & & \\ & a & \mapsto & (\overline{a}, \cdots, \overline{a}) & & & \end{array}.$$

$M = \prod_{Q \in \operatorname{Min} R} R/Q$ とおく. もし $C \ne (0)$ ならば $^{\exists}Q \in \operatorname{Min} C$. $\therefore \operatorname{depth} C_Q = 0$. このときもし $Q \in \operatorname{Min} R$ なら $M_Q = R_Q/QR_Q = R_Q$ となるので $C_Q = (0)$ となる. よって $Q \notin \operatorname{Min} R$ である. そして $\operatorname{Ass} R = \operatorname{Min} R$ より $\operatorname{depth} M_Q > 0$ である.

$$\therefore \begin{array}{ccccc} 0 \to \mathrm{H}^0_{QR_Q}(R_Q) \to & \mathrm{H}^0_{QR_Q}(M_Q) & \to & \mathrm{H}^0_{QR_Q}(C_Q) & \to \mathrm{H}^1_{QR_Q}(R_Q) \quad exact \\ & \| & & \nparallel & \\ & (0) & & (0) & \end{array}.$$

より $\operatorname{depth} R_Q = 1$ となり, 従って R_Q は DVR である. $^{\exists}P \in \operatorname{Min} R$ s,t $P \subsetneq Q$. $\therefore PR_Q = (0_{R_Q}) \in \operatorname{Spec} R_Q$ $\Rightarrow M_Q = R_Q/QR_Q = R_Q$. $\therefore C_Q = (0)$. (矛盾) 従って $C = (0)$ となり $R \cong \prod_{Q \in \operatorname{Min} R} R/Q$ as rings. $^{\forall}P \in \operatorname{Min} R$ に対して R/P は domain であって $(\mathrm{S}_2) + (\mathrm{R}_1)$ を仮定しているので R/P は 整閉整域である. $\square$