簡易辞書

後藤四郎

2003年1月

目次

1	Cohen-Macaulay 環と Gorenstein 環	1
1.1	局所コホモロジー加群	1
1.2	正則列と grade, $\text{depth}_R M$	2
1.3	Cohen-Macaulay 局所環と Cohen-Macaulay 加群	2
1.4	Cohen-Macaulay 加群と Hilbert-Samuel 重複度	3
1.5	Cohen-Macaulay 加群の局所化と素イデアル鎖条件	3
1.6	Big CM と small CM	3
1.7	Cohen-Macaulay 環研究と非混合定理	3
1.8	Gorenstein 環研究	4
1.9	正準加群と双対定理	5
1.10	次数環の a -不変量	5
2	Buchsbaum 環	6
2.1	Buchsbaum 局所環と Buchsbaum 加群	6
2.2	generalized Buchsbaum 環と generalized Buchsbaum 加群	6
3	Rees 代数研究	7

1 Cohen-Macaulay 環と Gorenstein 環

1.1 局所コホモロジー加群

可換環 R 内のイデアル $\mathfrak{a}$ と R -加群 M に対し,

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$$

とおき, M の $\mathfrak{a}$ に関する i 次局所コホモロジー加群という。関手 $\{H_{\mathfrak{a}}^i(*)\}_{i \geq 0}$ は $H_{\mathfrak{a}}^0(*) = \bigcup_{n \geq 1} [(0) :_* \mathfrak{a}^n]$ の導来関手である。 $0 \rightarrow M \rightarrow E^*$ を R -加群 M の入射分解とすれば, 局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ は, 鎖状複体 $H_{\mathfrak{a}}^0(E^*)$ の i 次コホモロジー加群に他ならない。 R が Noether 環であって, 環 R の元 $f_1, f_2, \dots, f_m$ が等式 $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(f_1, f_2, \dots, f_m)R}$ を満たすなら, R -加群の自然な同型

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong \lim_{n \rightarrow \infty} H^i(f_1^n, f_2^n, \dots, f_m^n; M)$$

が得られる。但し, $\{H^i(f_1^n, f_2^n, \dots, f_m^n; M)\}_{n \geq 1}$ は, R -加群 M の R の元の列 $f_1^n, f_2^n, \dots, f_m^n$ に関する Koszul コホモロジー加群のなす直系である。環 $R = \bigoplus_{h \in H} R_h$ が可換群 H 上の次数環であって, イデアル $\mathfrak{a}$ と R -加群 M が次数付であれば, 局所コホモロジー $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$ もまた, 自然に次数付 R -加群となる。

1.2 正則列と $\text{grade}, \text{depth}_R M$

可換環 R 上の加群 M に対し, R の元の列 $a_1, a_2, \dots, a_s$ が M -正則であるとは, すべての $0 \leq i \leq s-1$ について元 a_{i+1} が加群 $M/(a_j \mid 1 \leq j \leq i)M$ の非零因子であって, かつ, $M/(a_1, a_2, \dots, a_s)M \neq (0)$ が成り立つことをいう。 M が局所環 R 上の零でない有限生成加群なら, 2 番目の条件は, $(a_i \mid 1 \leq i \leq s)R \neq R$ と同値である。可換な Noether 環 R 上の有限生成加群 L, M に対し,

$$\text{grade}_M L = \inf \{i \in \mathbb{Z} \mid \text{Ext}_R^i(L, M) \neq (0)\}$$

とおく。 $\text{Supp}_R L \cap \text{Supp}_R M \neq \emptyset$, 即ち, $L \otimes_R M \neq (0)$ の時に限り, 不変量 $\text{grade}_M L$ は有限確定値をとり, 加群 L の零化イデアル $\text{Ann}_R L$ 内に含まれる M -正則列の長さの最大値に等しい。一般には, $\text{pd}_R M \geq \text{grade}_R M$ である。等式 $\text{pd}_R M = \text{grade}_R M$ が成り立つとき, 加群 M は完全であるという。 $(R, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環で, M は零ではない有限生成 R -加群とする。

$$\text{depth}_R M = \text{grade}_M R/\mathfrak{m}$$

と定め, R -加群 M の深さという。不変量 $t = \text{depth}_R M$ は必ず有限確定値をとり, $t \leq \dim_R M$ が成り立つ。 $t = 0$ であるための必要十分条件は, $\mathfrak{m} \in \text{Ass}_R M$ である。加群 M は長さ t の正則列を持ち, $a_1, a_2, \dots, a_s$ が M -正則列なら, $s \leq t$ であって, M -正則列 $a_1, a_2, \dots, a_s$ は長さ t の M -正則列に拡張される。極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ を用いれば, 加群 M の 2 つの不変量 $\dim_R M$ と $\text{depth}_R M$ は, 等式

$$\dim_R M = \sup \{i \in \mathbb{Z} \mid H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq (0)\}$$

と等式

$$\text{depth}_R M = \inf \{i \in \mathbb{Z} \mid H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq (0)\}$$

によって特徴付けられる。加群 M の射影次元 $\text{pd}_R M$ が有限なら, 等式 $\text{pd}_R M + \text{depth}_R M = \text{depth } R$ が成り立つ (M. Auslander-D. Buchsbaum)。

1.3 Cohen-Macaulay 局所環と Cohen-Macaulay 加群

Noether 局所環 R 上の有限生成加群 M は, 等式 $\dim_R M = \text{depth}_R M$ が成り立つとき, Cohen-Macaulay R -加群であるという。元 $a \in R$ が M -正則なら, M が Cohen-Macaulay R -加群であることと, M/aM が Cohen-Macaulay R -加群であることは同値である。局所環 R は R -加群として Cohen-Macaulay であるとき, Cohen-Macaulay 局所環であるという。Noether 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ 上の次元 s の Cohen-Macaulay 加群 M に対し, $r_R(M) = \ell_R(\text{Ext}_R^s(R/\mathfrak{m}, M))$ とおき, M の Cohen-Macaulay 型という。

1.4 Cohen-Macaulay 加群と Hilbert-Samuel 重複度

Noether 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ 上の次元 s の有限生成加群 M に対し, $\ell_R(M/(a_1, a_2, \dots, a_s)M) < \infty$ となるような $\mathfrak{m}$ の元の列 $a_1, a_2, \dots, a_s$ を加群 M の巴系といい, 加群 M の巴系で生成された R のイデアルを M の巴系イデアルという。環 R のイデアル $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} \neq R$) が条件 $\ell_R(M/\mathfrak{a}M) < \infty$ を満たすなら, n が十分大になるとき, 長さ $\ell_R(M/\mathfrak{a}^{n+1}M)$ は n に関する $\mathbb{Q}$ -係数 s 次の多項式であって, 整数 $e_{\mathfrak{a}}^i(M)$ ($0 \leq i \leq s$) を用いて, 一意的に

$$\ell_R(M/\mathfrak{a}^{n+1}M) = \sum_{i=0}^d (-1)^i e_{\mathfrak{a}}^i(M) \binom{n+s-i}{s-i} \quad (n \gg 0)$$

と表される。この等式が定める自然数 $e_{\mathfrak{a}}^0(M)$ を, イデアル $\mathfrak{a}$ に関する M の Hilbert-Samuel 重複度という。 M の如何なる巴系イデアル $\mathfrak{q}$ についても, 不等式 $\ell_R(M/\mathfrak{q}M) \geq e_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が成り立つ。Noether 局所環 R 上の有限生成加群 M が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は, M の巴系の少なくとも一つ (実は, すべて) が M -正則列をなすことである。この条件は, M の巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の少なくとも一つ (実は, すべて) について, 等式 $\ell_R(M/\mathfrak{q}M) = e_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が成り立つことと同値でもある。

1.5 Cohen-Macaulay 加群の局所化と素イデアル鎖条件

M は Noether 局所環 R 上の有限生成加群とする。 M が Cohen-Macaulay 加群なら, 局所化 $M_{\mathfrak{p}}$ はすべての $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R M$ に対して Cohen-Macaulay $R_{\mathfrak{p}}$ -加群であり, 等式

$$\dim_R M = \dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p}$$

が成り立つ。特に, $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R M$ なら, $\dim R/\mathfrak{p} = \dim_R M$ である。 M が Cohen-Macaulay R -加群であって $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Supp}_R M$ が $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ を満たすならば, $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ とを繋ぐ環 R の素イデアル列

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}$$

であって, 如何なる $0 \leq i \leq n-1$ についても $\mathfrak{p}_i$ と $\mathfrak{p}_{i+1}$ の間にはもはや素イデアルが挟み込めないような列の長さ n は, 取り方によらず一定であり, $\dim R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}$ に等しい。

1.6 Big CM と small CM

$(R, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする。 R -加群 M は, 環 R のすべての巴系が必ず M -正則列をなすとき, big Cohen-Macaulay R -加群であると呼ばれる。 big Cohen-Macaulay R -加群は有限生成であるとは限らない。有限生成 big Cohen-Macaulay R -加群は small Cohen-Macaulay R -加群であるという。体を含む如何なる Noether 局所環 R 上にも, big Cohen-Macaulay R -加群が存在することが知られて久しいが, small Cohen-Macaulay R -加群の存在問題は, $\dim R \leq 2$ のときを除いて, 一般には未解決である。

1.7 Cohen-Macaulay 環研究と非混合定理

可換な Noether 環 R 内で, 丁度 r 個の元で生成されたイデアル $\mathfrak{a}$ の高さが r ならば $\mathfrak{a}$ の如何なる素因子も必ず高さ r を持つとき, 非混合定理が成り立つという。体上の多項式環 $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ 内では, 非混合定理が成り立つ (F. S. Macaulay)。正則局所環内でも, 非混合定理が成り立つ (I. S.

Cohen)。一般に、Noether 環 R 内で非混合定理が成り立つための必要十分条件は、環 R が Cohen-Macaulay である、即ち、環 R の局所化 R_p (p は R の素イデアル) がすべて Cohen-Macaulay 局所環となることである (秋月康夫-永田雅宣)。Cohen-Macaulay 環上の多項式環 $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ と形式的冪級数環 $R[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$ は Cohen-Macaulay 環である。体 k 上のアフィン整域 R に対し、Noether の正規化 $A = k[X_1, X_2, \dots, X_d]$ ($d = \dim R$) をとれば、環 R が Cohen-Macaulay であることと、 R が自由 A -加群であることは同値である。 $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \rightarrow (S, \mathfrak{n})$ を Noether 局所環の平坦局所射とすれば、有限生成 R -加群 M について、 S -加群 $S \otimes_R M$ が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は、 R -加群 M が Cohen-Macaulay であってかつ環 $S/\mathfrak{m}S$ が Cohen-Macaulay となることである。従って、Noether 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ の Cohen-Macaulay 性は、 $\mathfrak{m}$ -進完備化で不変である。 R が正則局所環ならば、有限生成 R -加群 M が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は、等式 $\text{pd}_R M = \dim R - \dim_R M$ が成り立つことであり、この条件は M が完全 R -加群であることと同値である。局所環の Cohen-Macaulay 性は、本質的に、1 次元局所整域の持つ様々な良い性質の高次元への拡張を意図するものであるが、環と加群の Cohen-Macaulay 性はホモロジー代数学と非常に相性が良く、不変式論・代数幾何学・代数的組み合わせ論等に多くの重要かつ興味深い具体例があり、現代可換環論の主目的は Cohen-Macaulay 環の構造解析にあるといっても、さほど言い過ぎではない。

1.8 Gorenstein 環研究

具体例に富み、豊かな内容を持つ Gorenstein 環の理論は、H. Bass によって創始された。正則局所環の持つ様々な性質のうち、双対性だけを残したものが Gorenstein 局所環である。可換な Noether 環 R は、 R のすべての素イデアル p に対して局所環 R_p が有限な自己入射次元 $\text{id}_{R_p} R_p$ を持つとき、Gorenstein 環であるという。 $(R, \mathfrak{m})$ を次元 d の Noether 局所環とすれば、環 R が Gorenstein 局所環であることと $\text{id}_R R = d$ は同値であり、環 R が Cohen-Macaulay 局所環であってかつ $H_m^d(R) \cong E_R(R/\mathfrak{m})$ であることも同値である。ここで、 $E_{\widehat{R}}(R/\mathfrak{m})$ は、 R -加群 $R/\mathfrak{m}$ の入射包絡を表す。完全交叉環は Gorenstein 環であり、Gorenstein 環は Cohen-Macaulay 環である。Bass 数 $\mu_R^i(\mathfrak{m}, R) = \ell_R(\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, R))$ ($i \in \mathbb{Z}$) の言葉を用いれば、局所環 $(R, \mathfrak{m})$ が Gorenstein 環であるための必要十分条件は、 $\mu_R^d(\mathfrak{m}, R) = 1$ なることである。 R が Gorenstein 局所環なら、すべての整数 i と有限生成 R -加群 M に対して、 $\widehat{R}$ -加群の自然な同型

$$\widehat{R} \otimes_R \text{Ext}_R^i(M, R) \cong \text{Hom}_{\widehat{R}}(H_{\widehat{m}}^{d-i}(\widehat{R} \otimes_R M), E_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}))$$

が定まり、逆に、この同型の存在が Gorenstein 局所環を特徴付ける。ここで、 $\widehat{*}$ は R -加群の $\mathfrak{m}$ -進完備化を表す。Cohen-Macaulay 環と Gorenstein 環は、Cousin 複体の言葉による特徴付けも可能である。

k を体とし、 G を線型群 $\text{SL}_n(k)$ の有限部分群とし、体 k 上の多項式環 $S = k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ に、変数 $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ 達の k -線形変換として作用させれば、 $(|G|, \text{ch}k) = 1$ である限り、不変式環 $R = S^G$ は必ず Gorenstein となる。体 k 上 mn 個の変数を持つ多項式環 $S = k[X_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ 内で、変数を成分とする $m \times n$ 行列 $X = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ の t 次の小行列式 (但し、 $2 \leq t \leq \min\{m, n\}$) 全体が生成するイデアルを $I_t(X)$ とすれば、剰余環 $R_t = S/I_t(X)$ は必ず Cohen-Macaulay 整閉整域であり、環 $R_t = S/I_t(X)$ が Gorenstein 環であるための必要十分条件は、行列 $X = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ が正方であること、即ち、等式 $m = n$ が成り立つことである。

Noether 環 R が双対複体を持つための必要十分条件は、環 R が有限次元 Gorenstein 環の準同型像であることである。局所環の系統図：「正則局所環 $\Rightarrow$ 完全交叉局所環 $\Rightarrow$ Gorenstein 局所環 $\Rightarrow$ Cohen-Macaulay 局所環 $\Rightarrow$ Buchsbaum 局所環」内で、どの $\Rightarrow$ も逆 $\Leftarrow$ が成立しない。Gorenstein 局所環論の大部分が今日では、Cohen-Macaulay 局所環上の正準加群の理論に集約整理される。

1.9 正準加群と双対定理

$(R, \mathfrak{m})$ を次元 d の Noether 局所環とし, $\widehat{R}$ によって環 R の $\mathfrak{m}$ -進完備化を表す. R -加群 K が R の正準加群であるとは, $\widehat{R} \otimes_R K \cong \text{Hom}_{\widehat{R}}(\text{H}_{\widehat{\mathfrak{m}}}^d(\widehat{R}), \text{E}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}))$ が成り立つことをいう. 正準加群は存在するとは限らないが, 存在しさえすれば環 R に対して同型の範囲で一意的に定まり, 必ず有限生成である. 正準加群を K_R で表す. 局所環 R が Gorenstein 環の準同型像であれば, 正準加群 K_R が存在する. 環 R が Cohen-Macaulay であれば, 逆も正しい. Cohen-Macaulay 局所環 R が正準加群を持てば, すべての $i \in \mathbb{Z}$ と有限生成 R -加群 M に対して, $\widehat{R}$ -加群の自然な同型

$$\widehat{R} \otimes_R \text{Ext}_R^i(M, K_R) \cong \text{Hom}_{\widehat{R}}(\text{H}_{\widehat{\mathfrak{m}}}^{d-i}(\widehat{R} \otimes_R M), \text{E}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}))$$

が定まる. 次元 d の Cohen-Macaulay 局所環 R 上では, $\mu_R^i(\mathfrak{m}, K_R) = \delta_{i,d}$ ($i \in \mathbb{Z}$), $\text{id}_R K_R = d$ であって, R の任意の正則元 $a \in \mathfrak{m}$ に対し, $K_{R/aR} \cong K_R/aK_R$ となる. 局所環 R が Gorenstein であるための必要十分条件は, 環 R が Cohen-Macaulay であってかつ $K_R \cong R$ が成り立つことである. 次元正の局所環 R が K_R を持ちかつ R の全商環が Gorenstein ならば, 正準加群 K_R は環 R に高さ 1 のイデアルとして含まれ, もしも更に R が Cohen-Macaulay 環であれば, 環 R/K_R は Gorenstein 局所環となる. Cohen-Macaulay 局所環 R は一意分解整域であっても必ずしも Gorenstein ではないが, 環 R が正準加群 K_R を持てば, 必ず Gorenstein 環となる.

1.10 次数環の $\mathfrak{a}$ -不変量

次数環と次数環上の次数加群の構造の多くは, 次数付きのデータだけで決定される. 自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ 上の次数環と次数加群の理論は, 体上の多項式環 $R = k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ や環 R 内の単項式で生成されたイデアルの解析に用いられる.

環 $R = \bigoplus_{h \in H} R_h$ が可換群 H 上の次数環なら, 次数イデアル $\mathfrak{a}$ と次数 R -加群 M に対し, 局所コホモロジー加群 $\text{H}_{\mathfrak{a}}^i(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$ は次数 R -加群である. $H = \mathbb{Z}$ であって, 次数環 R は Noether 環であり, $R_n = (0)$ ($n < 0$), かつ環 $A = R_0$ が極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ局所環のときには, 次数環 R 内には斉次極大イデアルは $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \sum_{n > 0} R_n$ しか含まれず, 環 R が Cohen-Macaulay (それぞれ, Gorenstein 環, 完全交叉環, 正則環) であるための必要十分条件は, 局所環 $R_{\mathfrak{M}}$ が対応する環構造を持つことである.

$$\mathfrak{a}(R) = \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid [\text{H}_{\mathfrak{M}}^d(R)]_n \neq (0)\}$$

(但し $d = \dim R$) と定め, 次数環 R の $\mathfrak{a}$ -不変量という. 環 A が Gorenstein 局所環の準同型像なら, 次数 $\widehat{A} \otimes_A R$ -加群として

$$\widehat{A} \otimes_A K_R \cong \text{Hom}_{\widehat{A}}(\text{H}_{\widehat{\mathfrak{M}}}^d(\widehat{A} \otimes_A R), \text{E}_{\widehat{A}}(\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}))$$

となるような次数 R -加群 K_R が, 同型の範囲で一意的に定まる. ここで, $\widehat{\mathfrak{M}}$ は次数環 $\widehat{A} \otimes_A R$ の斉次極大イデアルを表し, 環 A の $\mathfrak{m}$ -進完備化環 $\widehat{A}$ は自明に次数環 (即ち, $\widehat{A}_0 = \widehat{A}$, $\widehat{A}_n = (0)$ ($n \neq 0$)) と見做し, 入射包絡 $\text{E}_{\widehat{A}}(\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}})$ も自明に次数 $\widehat{A}$ -加群と見做している. R -加群 K_R を環 R の次数正準加群と呼ぶ. 次数正準加群 K_R は有限生成であり, 等式 $\mathfrak{a}(R) = -\inf\{n \in \mathbb{Z} \mid [K_R]_n \neq (0)\}$ と $(K_R)_{\mathfrak{M}} \cong K_{(R_{\mathfrak{M}})}$ が成り立つ. 次数環 R が Gorenstein であるための必要十分条件は, R が Cohen-Macaulay 環であってかつ, 次数加群として $K_R \cong R(\mathfrak{a}(R))$ が成り立つことである. 次数環 R が Cohen-Macaulay なら, 任意の整数 i と有限生成次数 R -加群 M に対し, 次数 $\widehat{A} \otimes_A R$ -加群の自然な同型

$$\widehat{A} \otimes_A \text{Ext}_R^i(M, K_R) \cong \text{Hom}_{\widehat{A}}(\text{H}_{\widehat{\mathfrak{M}}}^{d-i}(\widehat{A} \otimes_A M), \text{E}_{\widehat{A}}(\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}))$$

が存在する.

2 Buchsbaum 環

2.1 Buchsbaum 局所環と Buchsbaum 加群

Buchsbaum 局所環は, Cohen-Macaulay 局所環の拡張概念である。(R, m) を Noether 局所環とし, M を次元 s の有限生成 R-加群とする。M のすべての巴系 $a_1, a_2, \dots, a_s$ が M-弱列をなす, 即ち, すべての整数 $0 \leq i \leq s-1$ に対して等式

$$(a_1, a_2, \dots, a_i)M :_M a_{i+1} = (a_1, a_2, \dots, a_i)M :_M \mathfrak{m}$$

が成り立つとき, M は Buchsbaum R-加群であるという。この条件は M の巴系がすべて加群 M に対して d-列をなす, 即ち, すべての整数 $1 \leq i \leq j \leq s$ に対して等式

$$(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})M :_M a_i a_j = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1})M :_M a_j$$

が成り立つことと同値であり, また, 差 $\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が, M の巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の選び方によらない, 一定の非負整数値を取ることとも同値である。差 $I(M) = \ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}^0(M)$ は, Buchsbaum 加群 M の Buchsbaum 不変量と呼ばれる。M が Buchsbaum R-加群であれば, $\mathfrak{m}H_{\mathfrak{m}}^i(M) = (0)$ ($i \neq s$) であって, 局所コホモロジー $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ ($i \neq s$) は剰余体 $R/\mathfrak{m}$ 上の有限次元ベクトル空間となり。等式

$$I(M) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \ell_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$$

が成り立つ。また, M の局所化 $M_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R M$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$) は必ず Cohen-Macaulay $R_{\mathfrak{p}}$ -加群であって, $\dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \dim_R M - \dim R/\mathfrak{p}$ が成り立つ。 $x_1, x_2, \dots, x_{\ell}$ を環 R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の一組の生成系とすると, M が Buchsbaum R-加群であるための必要十分条件は, 自然な射

$$H^i(x_1, x_2, \dots, x_{\ell}; M) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} H^i(x_1^n, x_2^n, \dots, x_{\ell}^n; M)$$

がすべての $i \neq s$ に対して全射となることである。環 R が R-加群として Buchsbaum であるとき, R は Buchsbaum 局所環であるという。環 R が Cohen-Macaulay 局所環であることと, $I(R) = 0$ の Buchsbaum 局所環であることは同値である。

整数 $d \geq 1$ と $\{0 \leq h_i\}_{0 \leq i \leq d-1}$ を与えれば, 次元 d の Buchsbaum 局所環 (R, m) を構成し, 等式 $\ell_R(H_{\mathfrak{m}}^i(R)) = h_i$ がすべての整数 $0 \leq i \leq d-1$ に対し成り立つようにできる。 $h_0 = 0$ ならば, Buchsbaum 局所環 R は整域であるように, $d \geq 2$ であってかつ $h_0 = h_1 = 0$ ならば, Buchsbaum 局所環 R は整閉整域であるように選ぶことが可能である。無限体を含み, かつ極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する重複度 $e_{\mathfrak{m}}^0(R)$ が 2 であるような, 2 次元以上 $\text{depth} R > 0$ の完備 Buchsbaum 局所環 (R, m) は, 分類され, 構造が決定されている。

2.2 generalized Buchsbaum 環と generalized Buchsbaum 加群

generalized Buchsbaum 加群 (FLC 加群, 或いは, generalized Cohen-Macaulay 加群とも呼ばれることがある) は, その名の通り, Buchsbaum 加群の拡張概念である。Noether 局所環 (R, m) 上の次元 s の有限生成加群 M は, すべての整数 i ($i \neq s$) に対して, 局所コホモロジー加群 $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ が有限生成 R-加群であるとき, generalized Buchsbaum R-加群であるという。この条件は, M の巴系イデアル $\mathfrak{q}$ をすべて動かした上限 $I(M) = \sup_{\mathfrak{q}} \{\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}^0(M)\}$ が有限確定値を取ることと同値で

あり, また, ある整数 $\ell \gg 0$ があって冪 $\mathfrak{m}^\ell$ に含まれる M の如何なる巴系も M 上で d -列を成すこと, 或いはまた, 環 R 内に M の巴系 $a_1, a_2, \dots, a_s$ であって等式

$$(*) \ell_R(M/(a_1^2, a_2^2, \dots, a_s^2)M) - e_{(a_1^2, a_2^2, \dots, a_s^2)R}^0(M) = \ell_R(M/(a_1, a_2, \dots, a_s)M) - e_{(a_1, a_2, \dots, a_s)R}^0(M)$$

を成り立たせるようなものが, 少なくとも一つは存在することと同値でもある。 M が generalized Buchsbaum R -加群であれば, 等式 $I(M) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \ell_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$ が成り立つ。 M の巴系イデアル $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \dots, a_s)R$ に対し, 差 $\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が上限 $I(M)$ に到達するための必要十分条件は, 上記等式 (*) が成り立つことである。このとき, 巴系 $a_1, a_2, \dots, a_s$ は標準的であるという。 generalized Buchsbaum 加群 M の巴系 $a_1, a_2, \dots, a_s$ が標準的であれば, 巴系イデアル $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ に含まれる M の巴系は必ず標準的であり, 加群 M に対し d -列として作用する。 generalized Buchsbaum 加群 M の局所化 $M_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R M$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$) は, 必ず Cohen-Macaulay $R_{\mathfrak{p}}$ -加群であって, 環 R が Cohen-Macaulay 局所環の準同型像であってかつ加群 M が擬非混合的 (即ち, 等式 $\dim_R M = \dim R/\mathfrak{p}$ がすべての $\mathfrak{p} \in \text{Min}_R M$ に対し成り立つ) なら, 逆も正しい。従って, Cohen-Macaulay 環の準同型像として出現する正規孤立特異点はすべて, generalized Buchsbaum 局所環である。

3 Rees 代数研究

A を可換 Noether 環とする。環 A のイデアル $I = (a_1, a_2, \dots, a_s)A$ に対し, 代数 $A[a_1 t, a_2 t, \dots, a_s t]$ (t は環 A 上の不定元である) を, イデアル I の Rees 代数 (または blow-up ring) と呼び, $\mathcal{R}(I)$ と書く。即ち, $\mathcal{R}(I) = A[It] = \sum_{n \geq 0} I^n t^n \subseteq A[t]$ である。自然な射 $\text{Proj } \mathcal{R}(I) \rightarrow \text{Spec } A$ はイデアル I を中心とする blow-up と呼ばれる。環 $\mathcal{R}(I) = A[a_1 t, a_2 t, \dots, a_s t]$ を多項式環 $R = A[T_1, T_2, \dots, T_s]$ の像として表現したとき, $a_1, a_2, \dots, a_s$ が A -正則列をなすならば, A -代数 $\mathcal{R}(I)$ の定義イデアルは, 環 R 内で $2 \times s$ 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_s \end{pmatrix}$ の 2 次の小行列式全体で生成される完全イデアルであり,

従って, 基礎環 A が Cohen-Macaulay であれば, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ も必ず Cohen-Macaulay 環となる。 $(A, \mathfrak{m})$ を次元 $d \geq 1$ (或いは, 次元 $d \geq 2$) の Cohen-Macaulay (或いは, Gorenstein) 局所環とすれば, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ の Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay (或いは, Gorenstein) 環であるための必要十分条件は, 随伴次数環 $\mathcal{G}(\mathfrak{m}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$ が Cohen-Macaulay (或いは, Gorenstein) 環であってかつその a -不変量 $a(\mathcal{G}(\mathfrak{m}))$ が負 (或いは, -2) であることである。次元 2 の正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 内では, 如何なる $\mathfrak{m}$ -準素整閉イデアル I に対しても, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は, Cohen-Macaulay 整閉整域である。

一般に, 次元 $d \geq 1$ の Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 内のイデアル I ($I \neq A$) に関する Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が, 等式 $\dim \mathcal{R}(I) = d + 1$ を満たすなら, 環 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は, 随伴次数環 $\mathcal{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$ の斉次極大イデアル $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/I \oplus \sum_{n > 0} [\mathcal{G}(I)]_n$ に関する次数局所コホモロジー加群 $\{H_{\mathfrak{m}}^i(\mathcal{G}(I))\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が次の 2 条件を満たすことである。

- (1) $H_{\mathfrak{m}}^i(\mathcal{G}(I)) = [H_{\mathfrak{m}}^i(\mathcal{G}(I))]_{-1}$ ($0 \leq i \leq d - 1$),
- (2) $a(\mathcal{G}(I)) < 0$, 即ち, すべての $n \geq 0$ に対し $[H_{\mathfrak{m}}^d(\mathcal{G}(I))]_n = (0)$ である。

このとき, すべての整数 $0 \leq i \leq d - 1$ について, $[H_{\mathfrak{m}}^i(\mathcal{G}(I))]_{-1} \cong H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ が成り立つ。従って, 基礎環 A が Cohen-Macaulay である場合には, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環であるための必要十分条件は, $\mathcal{G}(I)$ が Cohen-Macaulay 環であってかつ $a(\mathcal{G}(I)) < 0$ が成り立つことである。環 A が正則局所環である場合には, 環 $\mathcal{G}(I)$ が Cohen-Macaulay なら, 必ず不等式 $a(\mathcal{G}(I)) < 0$ が成り立ち, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性と随伴次数環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性が同値となる。これらの判定法は, 環 A 内のイデアルの filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に付随する Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n \subseteq A[t]$

に対しても、そのまま有効である。

次元 $d \geq 1$ の局所環 $(A, \mathfrak{m})$ については、環 A が Buchsbaum 局所環であってかつ $H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ ($i \neq 1, d$) であることと、環 A のすべての巴系イデアル $\mathfrak{q}$ に対しその Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay 環であることは同値である。このとき、すべての整数 $n \geq 1$ に対し、冪 $\mathfrak{q}^n$ の Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^n)$ も Cohen-Macaulay 環となる。 $(A, \mathfrak{m})$ を次元正の局所環とすると、環 $A/H_{\mathfrak{m}}^0(A)$ が Buchsbaum (または、Gorenstein) 局所環であるための必要十分条件は、環 A のすべての巴系イデアル $\mathfrak{q}$ に対し $\text{Proj } \mathcal{R}(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay (または、Gorenstein) スキームとなることである。

次元正であって、その $\mathfrak{m}$ -進完備化が擬非混合的である如何なる Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ に対しても、環 A 内にイデアル I を選び、Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環となるようにすることができる。これを用いて、Noether 環 A が双対複体を持つことと、環 A が有限次元の Gorenstein 環の準同型像であることが同値であることが証明される。

Rees 環に於ける Cohen-Macaulay 性の解析は、可換環論に於ける懸案事項の一つである homological conjectures と密接な関連を持つ。スキーム $\text{Proj } \mathcal{R}(I)$ 上の Grauert-Riemenschneider 型の消滅定理は、Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ のイデアル $\mathcal{R}(I)_+$ の Cohen-Macaulay 性と同値である。イデアル I を体 k 上の多項式環 $A = k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ 内の斉次イデアルに限定し、Rees 環 $\mathcal{R}(I) = A[It]$ をアーベル群 $\mathbb{Z}^2$ 上の次数環と見做し、その斉次対角成分を抜き出せば、斉次次数環 A/I^n ($n \geq 1$) の Castelnuovo-Mumford regularity の解析に繋がる。環構造を巡る Rees 代数研究は、加群の Rees 代数研究を視野に収めながら、多面的広がりを見せ、新しい局面に突入しつつあると考えられる。