Quadratic algebras in two variables

上山 健太*

静岡大学大学院理学研究科

本稿は第 15 回代数学若手研究会において，上記のタイトルで講演した内容をまとめたものである．詳細については [4] を参照されたい．

1 導入

この報告集では代数的閉体 k をひとつ固定する．$X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ を有限集合，$k\langle X\rangle$ を X で生成された k 上自由代数，$I \subset k\langle X\rangle$ をイデアルとする．I が次数 2 の斉次な関係式によって生成されているとき，次数付き代数 $A = k\langle X\rangle/I$ を quadratic algebra という．本研究の目的は 2 変数 quadratic algebra，つまり

$$k\langle x, y\rangle/(f_1, \cdots, f_r), \quad \deg f_i = 2 \ \text{ for all } i$$

を次の二つの段階で分類することである．

1. 次数付き代数としての同型を除いて分類する．
2. 次数付き加群の圏としての同値（次数付き森田同値）を除いて分類する．

例 1.1. quadratic algebra A, A' を

$$A = k\langle x, y\rangle/(xy, x^2 - yx + y^2), \quad A' = k\langle x, y\rangle/(x^2, y^2 - xy)$$

で定義する．

- A と A' は次数付き代数として同型か？…答えは YES，つまり $A \cong A'$ である．

例 1.2. quadratic algebra B, B' を

$$B = k\langle x, y\rangle/(xy + yx), \quad B' = k\langle x, y\rangle/(-x^2 + xy - yx)$$

で定義する．

- B と B' は次数付き代数として同型か？…答えは NO，つまり $B \not\cong B'$ である．
- では B と B' は次数付き森田同値か？…答えは YES，つまり $\operatorname{GrMod} B \cong \operatorname{GrMod} B'$ である．

このように次数付き代数として同型か，次数付き森田同値かを関係式を見ただけで判断することは難しい．

* r0930001@ipc.shizuoka.ac.jp

2 代数的分類と幾何的分類

2.1 代数的分類

同型ならば代数的な性質が一致していることを利用して分類できる．

例 2.1 (整域性よる分類)**.** quadratic algebra A, A' を

$$A = k\langle x, y\rangle/(xy - yx), \quad A' = k\langle x, y\rangle/(xy)$$

で定義する．A は整域であり，A' は整域ではないので $A \ncong A'$ と分かる．

例 2.2 (ネーター性よる分類)**.** quadratic algebra B, B' を

$$B = k\langle x, y\rangle/(x^2, y^2), \quad B' = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy)$$

で定義する．B は右かつ左ネーター環であるが，B' は右イデアルの無限増加列

$$xB' \subsetneq xB' + yxB' \subsetneq xB' + yxB' + y^2xB' \subsetneq \cdots$$

が取れるので右ネーター環でない．これより $B \ncong B'$ と分かる．

定義 2.3. $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ を局所有限次数付き k 代数とする．このとき A のヒルベルト級数 $H_A(t)$ を次で定義する．

$$H_A(t) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\dim_k A_i)t^i \quad \in \mathbb{Z}[[t, t^{-1}]].$$

同型ならばヒルベルト級数は一致する．

例 2.4 (ヒルベルト級数よる分類)**.** quadratic algebra C, C' を

$$C = k\langle x, y\rangle/(xy), \quad C' = k\langle x, y\rangle/(x^2)$$

で定義する．このときそれぞれのヒルベルト級数は

$$\begin{aligned} H_C(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 \cdots, \\ H_{C'}(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 \cdots (\text{フィボナッチ級数}). \end{aligned}$$

つまり $H_C(t) \neq H_{C'}(t)$．これより $C \ncong C'$ と分かる．

しかし，整域性やネーター性による分類は YES/NO の 2 つにしか分けられない．またヒルベルト級数による分類も大まかにしか分けられない．

問題 2.5. quadratic algebra A, B, C を

$$A = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy + yx), \quad B = k\langle x, y\rangle/(x^2, y^2), \quad C = k\langle x, y\rangle/(xy, yx)$$

で定義する．A, B, C は全て整域であり，右かつ左ネーター環であり，Koszul である．ヒルベルト級数は

$$H_A(t) = H_B(t) = H_C(t) = 1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 2t^5 \cdots = \frac{1+t}{1-t}$$

で与えられ，大域次元は全て ∞ である．A, B, C の中に次数つき代数として同型なものはあるか？また，次数付き森田同値なものはあるか？

そこで，この問題に答えるために幾何的分類を考察する．

2.2 幾何的分類

非可換代数幾何学の発端は 3 次元 Artin-Schelter regular (AS-regular) algebra [1] を分類することにある．1990 年 Artin-Tate-Van den Bergh が point scheme という概念を導入して，幾何的なアプローチで 3 次元 Artin-Schelter regular algebra を完全に分類したことが非可換代数幾何学の出発点になっている [2]．ここでは AS-regular algebra 以外の代数の分類にも幾何的なアプローチを応用する．

定義 2.6. $A = k\langle X\rangle/(f_1, \cdots, f_r)$ を n 変数 quadratic algebra とする．このとき A の point scheme を

$$\Gamma_A := \{(p, q) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \mid f_i(p, q) = 0, \forall i = 1, \cdots, r\}.$$

で定義する（正確には Artin-Tate-Van den Bergh の point scheme とは異なるが言葉を乱用している）．

注意 2.7 (代入の仕方)**.** $f = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2$ を 2 変数の関係式, $p = (a_1, b_1),\ q = (a_2, b_2) \in \mathbb{P}^1$ とすると

$$f(p, q) = \alpha a_1 a_2 + \beta a_1 b_2 + \gamma b_1 a_2 + \delta b_1 b_2$$

となる．

定理 2.8. (cf. [3]) A, B を n 変数 quadratic algebra とし, A, B の point scheme をそれぞれ $\Gamma_A, \Gamma_B \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ とすると次が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc}
A \cong B & \Longrightarrow & \exists \sigma \in \operatorname{Aut}_k \mathbb{P}^{n-1} \text{ such that } \Gamma_A \xrightarrow[\sim]{\sigma\times\sigma} \Gamma_B \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} B & \Longrightarrow & \exists \sigma, \tau \in \operatorname{Aut}_k \mathbb{P}^{n-1} \text{ such that } \Gamma_A \xrightarrow[\sim]{\sigma\times\tau} \Gamma_B
\end{array}$$

この定理により point scheme の分類を quadratic algebra の分類に活かすことができる．

例 2.9. 問題 2.5 を考察する．

$$A = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy + yx), \quad B = k\langle x, y\rangle/(x^2, y^2), \quad C = k\langle x, y\rangle/(xy, yx)$$

について，それぞれの point scheme は

$$\begin{aligned}
\Gamma_A &= (0, 1) \times (0, 1) \\
\Gamma_B &= (0, 1) \times (1, 0) \cup (1, 0) \times (0, 1) \\
\Gamma_C &= (0, 1) \times (0, 1) \cup (1, 0) \times (1, 0)
\end{aligned}$$

で与えられる．Γ_A と Γ_B，さらに Γ_A と Γ_C が（多様体として）同型でないことは見た目ですぐに分かる．さらに少し考えると，ひとつの $\sigma \in \operatorname{Aut}_k \mathbb{P}^1$ による $\sigma \times \sigma$ で Γ_B と Γ_C を同型にするこ

とはできない事が分かる．これより A, B, C は全て非同型であり，さらに $\operatorname{GrMod} A \not\cong \operatorname{GrMod} B$, $\operatorname{GrMod} A \not\cong \operatorname{GrMod} C$ であることが分かる．

注意 2.10. B と C が次数付き森田同値かどうかは判断できないが，point scheme が似ているということより次数付き森田同値になっている "可能性が高い" と予想できる．実際，上の例において Γ_B から Γ_C への同型射は $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \tau = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ による $\sigma \times \tau$ により構成できるが，それをもとに B と C が次数付き森田同値であることが示せる．（Zhang による twisting system を利用する [5].）

2 変数 quadratic algebra の分類において，この point scheme による分類はかなり効果的である．実際, ヒルベルト級数等の分類と point scheme の分類を組み合わせることで 2 変数 quadratic algebra の分類は完成した．

3 分類結果

2 変数 quadratic algebra

$$k\langle x, y\rangle/(f_1, \cdots, f_r)$$

の分類は関係式の数 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ の五つの場合に分けられる．

明らかに，$r = 0$ のときは

$$k\langle x, y\rangle$$

のみであり，$r = 4$ のときは

$$k\langle x, y\rangle/(x^2, xy, yx, y^2)$$

のみである．また $r = 1$ のときの分類結果は知られており，$r = 3$ のときは $r = 1$ のときの quadratic dual を利用して分類される．これより $r = 2$ のときの分類が本研究の主結果である．

3.1 $r = 1$ のとき

1. 次数付き代数としての同型を除いて分類した場合：

$$\begin{aligned}
&k\langle x, y\rangle/(x^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(xy),\\
&k\langle x, y\rangle/(-x^2 + xy - yx),\\
&k\langle x, y\rangle/(xy - \lambda yx) \ =: k_\lambda[x, y] \quad (\lambda \neq 0)
\end{aligned}$$

に分類できる．但し，

$$k_\lambda[x, y] \cong k_{\lambda'}[x, y] \Leftrightarrow \lambda' = \lambda^{\pm 1}$$

が成立する．

2. 次数付き森田同値を除いて分類した場合：

$$\begin{aligned}
&k\langle x, y\rangle/(x^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(xy),\\
&k\langle x, y\rangle/(xy - yx) \ \cong k[x, y]
\end{aligned}$$

に分類できる．

3.2 $r = 3$ のとき

1. 次数付き代数としての同型を除いて分類した場合：

$$\begin{aligned}
&k\langle x, y\rangle/(xy, yx, y^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, yx, y^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2 + xy, xy + yx, y^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, \lambda xy + yx, y^2) \ =: E_\lambda \quad (\lambda \neq 0)
\end{aligned}$$

に分類できる．但し，

$$E_\lambda \cong E_{\lambda'} \Leftrightarrow \lambda' = \lambda^{\pm 1}$$

が成立する．

2. 次数付き森田同値を除いて分類した場合：

$$\begin{aligned}
&k\langle x, y\rangle/(xy, yx, y^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, yx, y^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, xy + yx, y^2)
\end{aligned}$$

に分類できる．

3.3 $r = 2$ のとき

1. 次数付き代数としての同型を除いて分類した場合：

$$\begin{aligned}
&k\langle x, y\rangle/(x^2, xy),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, yx),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, y^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, y^2 - xy),\\
&k\langle x, y\rangle/(x^2, xy - \lambda yx) =: S_\lambda, \quad (\lambda \neq 0)\\
&k\langle x, y\rangle/(xy, yx),\\
&k\langle x, y\rangle/(xy, x^2 - yx),\\
&k\langle x, y\rangle/(xy, x^2 - y^2),\\
&k\langle x, y\rangle/(xy, x^2 - yx + \mu y^2) =: T_\mu \quad (\mu \neq 0, 1)
\end{aligned}$$

に分類できる．但し，

$$S_\lambda \cong S_{\lambda'} \Leftrightarrow \lambda' = \lambda, \quad T_\mu \cong T_{\mu'} \Leftrightarrow \mu' = \mu$$

が成立する．

2. 次数付き森田同値を除いて分類した場合：

$$\begin{aligned}
&k\langle x,y\rangle/(x^2,xy),\\
&k\langle x,y\rangle/(x^2,yx),\\
&k\langle x,y\rangle/(x^2,y^2-xy),\\
&k\langle x,y\rangle/(x^2,xy-yx),\\
&k\langle x,y\rangle/(xy,yx),\\
&k\langle x,y\rangle/(xy,x^2-yx),\\
&k\langle x,y\rangle/(xy,x^2-y^2),\\
&k\langle x,y\rangle/(xy,x^2-yx+\mu y^2)=:T_\mu \quad (\mu\neq 0,1)
\end{aligned}$$

に分類できる．但し，

$$\operatorname{GrMod} T_\mu \cong \operatorname{GrMod} T_{\mu'} \Leftrightarrow \mu'=\mu \text{ or } \mu+\mu'=1$$

が成立する．

4 分類された quadratic algebra の性質

分類された quadratic algebra の整域性，ネーター性，大域次元，GK 次元，Koszul 性，ヒルベルト級数については最後のページの表を参照されたい．

参考文献

[1] M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.* **66** (1987), 171-216.

[2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, *The Grothendieck Festschrift* Vol. **1** Birkhauser, (1990), 33-85.

[3] I. Mori, Noncommutative projective schemes and point schemes, *Algebras, Rings and Their Representations*, World Sci. Publ. (2006), 215-239.

[4] K. Ueyama, Geometric classification of quadratic algebras in two variables, *Tsukuba J. Math.* , accepted.

[5] J. J. Zhang, Twisted graded algebras and equivalences of graded categories, *Proc. London Math. Soc.* **72** (1996), 281-311.

表 1　List of Properties

A	domain	left noetherian	right noetherian	gldim$A$	GKdim$A$	Koszul	Hilbert series $H_A(t)$
$k\langle x,y\rangle$	Yes	No	No	1	∞	Yes	$1/(1-2t)$
$k\langle x,y\rangle/(x^2)$	No	No	No	∞	∞	Yes	$(1+t)/(1-t-t^2)$
$k\langle x,y\rangle/(xy)$	No	No	No	2	2	Yes	$1/(1-t)^2$
$k\langle x,y\rangle/(-x^2+xy-yx)\cdots\clubsuit$	Yes	Yes	Yes	2	2	Yes	$1/(1-t)^2$
$k\langle x,y\rangle/(xy-\lambda yx)\cdots\clubsuit\clubsuit$	Yes	Yes	Yes	2	2	Yes	$1/(1-t)^2$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,xy)$	No	Yes	No	∞	1	Yes	$(1+t)/(1-t)$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,yx)$	No	No	Yes	∞	1	Yes	$(1+t)/(1-t)$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,y^2-xy)$	No	Yes	Yes	∞	0	No	$1+2t+2t^2+t^3$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,xy-\lambda yx)\cdots\diamondsuit\diamondsuit$	No	Yes	Yes	∞	1	Yes	$(1+t)/(1-t)$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,y^2)\cdots\heartsuit$	No	Yes	Yes	∞	1	Yes	$(1+t)/(1-t)$
$k\langle x,y\rangle/(xy,yx)\cdots\heartsuit$	No	Yes	Yes	∞	1	Yes	$(1+t)/(1-t)$
$k\langle x,y\rangle/(xy,x^2-yx)$	No	Yes	Yes	∞	1	No	$(1+t-t^3)/(1-t)$
$k\langle x,y\rangle/(xy,x^2-y^2)$	No	Yes	Yes	∞	0	No	$1+2t+2t^2$
$k\langle x,y\rangle/(xy,x^2-yx+\mu y^2)\cdots\sharp\sharp$	No	Yes	Yes	∞	0	No	$1+2t+2t^2$
$k\langle x,y\rangle/(xy,yx,y^2)$	No	Yes	Yes	∞	1	Yes	$(1+t-t^2)/(1-t)$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,yx,y^2)$	No	Yes	Yes	∞	0	Yes	$(1+t)^2$
$k\langle x,y\rangle/(x^2+xy,xy+yx,y^2)\cdots\spadesuit$	No	Yes	Yes	∞	0	Yes	$(1+t)^2$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,\lambda xy+yx,y^2)\cdots\spadesuit\spadesuit$	No	Yes	Yes	∞	0	Yes	$(1+t)^2$
$k\langle x,y\rangle/(x^2,xy,yx,y^2)$	No	Yes	Yes	∞	0	Yes	$1+2t$

但し $\lambda\neq 0,\mu\neq 0,1$．同じマーク $\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit,\spadesuit,\sharp$ がついた代数の間には（何らかの）次数付き森田同値が存在する．