有限群の群代数上のScott加群

千葉大学理学研究科基盤理学専攻　高橋萌子

1　はじめに

有限群のモジュラー表現とは，素数標数をもつ体上での有限群の表現であり，約70年前にBrauerによって研究が始められ基礎が築かれた.

- p を素数，k を標数 p の代数閉体，G を有限群とする.

  k 上の G の表現を考えることは kG-加群を考えることと同値なので，モジュラー表現論では指標だけではなく加群の研究が重要である.

- 加群は，有限生成右加群を考える.

- $a \in kG$, $g_1, g_2 \in G$ に対し，$a(g_1, g_2) := {g_1}^{-1}ag_2$ で kG を $k[G \times G]$-加群とみなしたときの直既約直和分解を

  $$kG = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$$

  とするとき，各直既約直和因子 A_i $(0 \leq i \leq r)$ を G のブロックという.

- 全ての有限生成 kG-加群は直既約加群の直和

  $$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$$

  に分解され，各直和因子 U_j はあるブロック A_i に属する.

  (各直既約加群 U_j に対して，ある $0 \leq i \leq r$ が唯一つ存在して，$U_jA_i = U_j$ かつ $U_jA_l = 0$ $(l \neq i)$ を満たす. このとき U_j は A_i に属するという.)

- 自明な kG-加群 k_G が属するブロックを主ブロックという.

- U_j を直既約 kG-加群とし，U_j の vertex を $\mathrm{vtx}(U_j)$ と書くと，

  $$\mathrm{vtx}(U_j) \leq G\ ;\ p\text{-部分群}$$

  で，G-共役を除いて一意的である.

・ブロックを $k[G \times G]$-加群とみなしたときの vertex である，$G \times G$ の部分群と同型な G の部分群を，不足群という．

・ブロックに属する直既約加群の vertex は，そのブロックの不足群の部分群になる．

以下，説明していない用語は，永尾・津島 [10] を参照してほしい．

- 今回の結果

G が位数 p^n $(n > 1)$ の巡回 Sylow p-群をもつ場合について，Sylow p-群より真に小さい，自明でない群を vertex にもつ Scott 加群の構造を決定した．これは越谷・功刀 [8] において，vertex が巡回不足群である，自明な source をもつ加群を全て解明していることから，vertex が不足群より真に小さい場合について，自明な source をもつ加群はどのようになるのか考えることから派生している．

	対象	属するブロック
今回	Scott 加群 (t.s.m. の一部)	主ブロック
越谷・功刀*1	trivial source module	主ブロック以外のブロックの可能性もある

属するブロックの不足群	vertex
巡回 Sylow p-群 P で *2 $\lvert P\rvert = p^n$ $(n > 1)$	$1 \lneq P_i \lneq P$ *3 $(\lvert P_i\rvert = p^i,\ 1 \leq i \leq n-1)$
巡回 p-部分群	不足群と一致するもの

*1. 越谷・功刀 [8] を参照．
*2. 主ブロックの不足群は G の Sylow p-群である．
*3. vertex が自明な群のとき，Sylow p-群のときは易しい．

2 Scott 加群と諸定理

$(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ を spliting p-modular system とする．つまり，完備離散付値環 $\mathcal{O}$ が存在して唯一つの極大イデアル $\mathrm{rad}(\mathcal{O})$ をもち，$\mathcal{K}$ は $\mathcal{O}$ の商体で標数 0 であり，k は $\mathcal{O}$ の剰余体 $\mathcal{O}/\mathrm{rad}(\mathcal{O})$ で標数 p である．また，G の任意の部分群に対して $\mathcal{K}$ と k は共に分解体である．

定理 2.1. (Scott, Alperin) (永尾・津島 [10], IV 章, 定理 8.4 参照) $G \geq H$, $Syl_p(H) \ni Q$ とする．このとき

(i) $k_H \uparrow^G$ の直既約因子 S で次の 3 条件を満たすものが存在する．

  (a) $k_G \mid \mathrm{soc}(S)$.

  (b) $k_G \mid S/\mathrm{rad}(S)$.

  (c) vertex のひとつに Q をもち，かつ $f = f(G, Q, N = N_G(Q))$ を Green 対応とすると，fS は $k[N/Q]$-加群とみることができて，N/Q の自明な加群の射影被覆である．

(ii) $k_H \uparrow^G$ の直既約分解において，上の 3 条件のどれに対してもそれを満たす直既約因子は一意的に定まる．

上の定理のような加群 S を $\mathrm{Scott}(G, H)$ と表し，Scott 加群とよぶ．これは同型を度外視すれば，G と H だけできまる．上の定理の条件 (c) とそれを満たす加群の一意性から，ただちに次が得られる．

系 2.2. (永尾・津島 [10], IV 章, 系 8.5 参照) $G \geq H$, H' とし， Q , Q' をそれぞれ H , H' の Sylow p-群とするとき次が成り立つ．

$$\mathrm{Scott}(G, H) \cong \mathrm{Scott}(G, H') \Longleftrightarrow Q \text{ と } Q' \text{ は } G \text{ 共役}.$$

特に $\mathrm{Scott}(G, H) \cong \mathrm{Scott}(G, Q)$ である．

従って，G の p 部分群 Q を vertex にもつ $\mathrm{Scott}(G, Q)$ を考えればよく，これを Q を vertex にもつ Scott 加群とよぶ．

定理 2.1 より Scott 加群は自明な source をもつ加群で，kG の主ブロックに属することがわかる．また，Scott 加群は自己双対性をもつ。

注意 1. $\mathrm{Scott}(G, 1) = P(k_G)$ (自明な kG-加群 k_G の射影被覆) であり，G の Sylow p-群を P とすると，$\mathrm{Scott}(G, P) = k_G$ である．

定義 2.1. kG-加群 M に対し，ある $\mathcal{O}G$-加群 $\hat{M}$ が存在して，$\hat{M}/\mathrm{rad}(\hat{M}) \cong M$ となるとき，M は持ち上げ可能であるという．また $\hat{M}$ を M の lift という．

定理 2.3. 自明な source をもつ kG-加群は，自明な source をもつ $\mathcal{O}G$-加群に一意に持ち上げ可能である．

注意 2. kG-加群 M が持ち上げ可能であるとき，その lift を $\hat{M}$ とすると $\widetilde{M} = \hat{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ は $\mathcal{K}G$-加群で，これに対応する表現の通常指標を考えることができる．この指標を $\chi_{\hat{M}}$ と表し，以下では M に対応する通常指標とよぶことにする．定理 2.3 より Scott 加群に対応する通常指標が存在する．

次に、自明な source をもつ加群について考える上で重要になる補題を紹介しておく．

補題 2.4. (Green-Landrock-Scott) M を自明な source をもつ kG-加群，$\chi_{\hat{M}}$ を M に対応する通常指標とする．

(i) Q が G の p-部分群ならば，

$$\dim_k[\mathrm{soc}(M{\downarrow}_Q)] = (\chi_{\hat{M}}, 1_Q)_Q$$

(ii) x を G の p-元とすると，$\chi_{\hat{M}}(x)$ は自明な $k\langle x\rangle$-加群 $k_{\langle x\rangle}$ と同型な $M{\downarrow}_{\langle x\rangle}$ の直和因子の数に等しい．特に $\chi_{\hat{M}}(x)$ は非負整数である．

(iii) x を G の p-元とする．$\chi_{\hat{M}}(x) \neq 0$ であることと，x が M のある vertex に属することは同値である．

3 準備

- p を奇素数とする．

  $p=2$ のとき，Scott 加群は長さ p^{n-i} の単列加群 (uniserial module) になる．

- P は G の巡回 Sylow p-部分群で，$|P|=p^n$ $(n>1)$ とする．

- P_i を位数 p^i の P の部分群とする．

- A を G の主ブロックとする．

- e はブロック A の惰性指数とする．

  不足群が巡回群である主ブロックに対しては，$e:=|N_G(P)/C_G(P)|$ である．また，ブロックの惰性指数とブロックに属する Brauer 指標の個数は一致する．このとき，$\frac{p-1}{e}$ は自然数である．

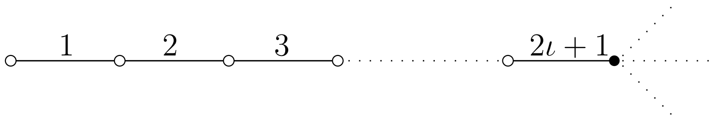
- $m:=\dfrac{|P|-1}{e}=\dfrac{p^n-1}{e}$ ，$m_{n-i}:=\dfrac{p^{n-i}-1}{e}$ と定める．

- $\mathcal{T}(A)$ で A の Brauer tree を表すことにする．

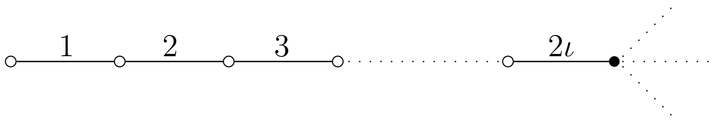
  Brauer tree とは，G のブロックが巡回不足群をもつときに，分解行列 (ブロックに属する既約通常指標の p'-元への制限を，既約 Brauer 指標の一次結合で表したときの係数を成分にもつ行列) から得られる通常指標と Brauer 指標の関係をグラフにしたもので，その辺には既約 Brauer 指標が，頂点には既約通常指標が対応する．従って，e は $\mathcal{T}(A)$ の辺の数である．

仮定 . 以後，$\mathcal{T}(A)$ が次の二つの形である場合について考える．ただし，特に断りがない限り，辺の番号とその辺に対応する単純 kG-加群を同一視する．

(a) 自明な kG-加群に対応する辺の端点 (これは tree の端点になっている) から例外頂点に至る最短経路は「直線」で，その最短経路の長さが奇数の場合．$(\iota \geq 1)$



(b) 自明な kG-加群に対応する辺の端点 (これは tree の端点になっている) から例外頂点に至る最短経路は「直線」で，その最短経路の長さが偶数の場合．$(\iota \geq 1)$



上記の「直線」とは，その経路上に他の分岐がないことを意味する．

ブロック A は e 個の非例外指標 $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_e\}$ と，m 個の例外指標 $\{\chi'_1, \chi'_2, \ldots, \chi'_m\}$ をもち，$\chi_0 = \sum_{j=1}^{m} \chi'_j$ とすると，$\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_e$ は $\mathcal{T}(A)$ の各頂点に対応する．ただし，χ_0 は例外頂点 (黒丸で表した頂点) に対応する．

$P = \langle u \rangle$，$\varepsilon := e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p^n}}$ とするとき，

$$\mathrm{Irr}(P) - \{1_P\} \ni \lambda_j : P \to \mathcal{K} \;\; [u \mapsto \varepsilon^j]$$

と定める．$N_G(P)$ による $\mathrm{Irr}(P) - \{1_P\}$ への作用の代表元は m 個あるので，$\{\lambda_{t_j}\}_{1 \leq j \leq m}$ を代表元の集合とする．さらに，$\chi_{\lambda_{t_j}}$ を λ_{t_j} と $N_G(P)$-共役な P の既約指標の和とする．このとき，

命題 3.1. χ'_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を A に属する例外指標とすると，

$$\exists t_j \text{ に対し，} \chi'_j|_{P-\{1\}} = \chi_{\lambda_{t_j}}$$

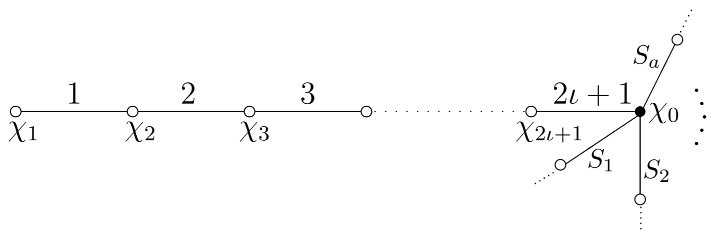
である．

そこで $\chi_{\lambda_{t_j}}$ を G へ拡張して，例外指標 χ'_j の代わりに $\chi_{\lambda_{t_j}}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を用いることにする．

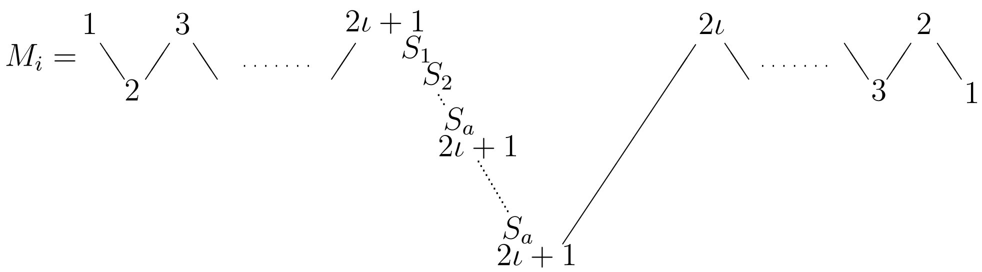
4 主定理

定理 4.1. $0 < i < n$ に対して $M_i = \mathrm{Scott}(G, P_i)$ とおき，M_i に対応する通常指標を $\chi_{\hat{M}_i}$ とする.

(a) $\mathcal{T}(A)$ が以下のようなとき，つまり自明な kG-加群に対応する辺の端点 (これは tree の端点になっている) から例外頂点に至る最短経路は「直線」で，その最短経路の長さが奇数の場合 $(\iota \geq 1)$,



(ただし，例外頂点から伸びている辺に対して反時計回りに番号がふられているものとする.) M_i は次のような組成因子の構造をもつ直既約加群である.



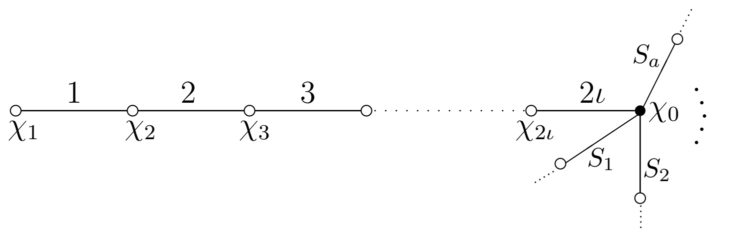
ここで, M_i の組成因子における単純加群 $2\iota+1$ の重複度は $m_{n-i}+1$ であり，例外頂点から伸びるその他の辺に対応する単純加群 S_j $(j = 1, 2, \ldots, a)$ の重複度は，m_{n-i} である.

また，対応する通常指標は

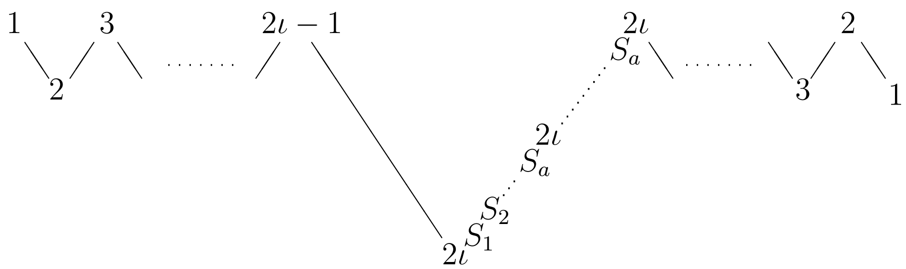
$$\chi_{\hat{M}_i} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \cdots + \chi_{2\iota+1} + \sum_{p^i \mid t_j,\ 1 \leq j \leq m} \chi_{\lambda_{t_j}}$$

である.

(b) $\mathcal{T}(A)$ が以下のようなとき，つまり自明な kG-加群に対応する辺の端点 (これは tree の端点になっている) から例外頂点に至る最短経路は「直線」で，その最短経路の長さが偶数の場合 ($\iota \geq 1$),



(ただし，例外頂点から伸びている辺に対して反時計回りに番号がふられているものとする.) M_i は次のような組成因子の構造をもつ直既約加群である.

$M_i =$ 

ここで, M_i の組成因子における単純加群 2ι の重複度は $m-m_{n-i}+1$ であり，例外頂点から伸びるその他の辺に対応する単純加群 S_j ($j = 1, 2, \dots, a$) の重複度は，$m - m_{n-i}$ である.

また，対応する通常指標は

$$\chi_{\hat{M}_i} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \cdots + \chi_{2\iota} + \sum_{p^i \nmid t_j,\ 1 \leq j \leq m} \chi_{\lambda_{t_j}}$$

である.

ただし、上記の「直線」とは，その経路上に他の分岐がないことを意味する.

5　主定理の証明

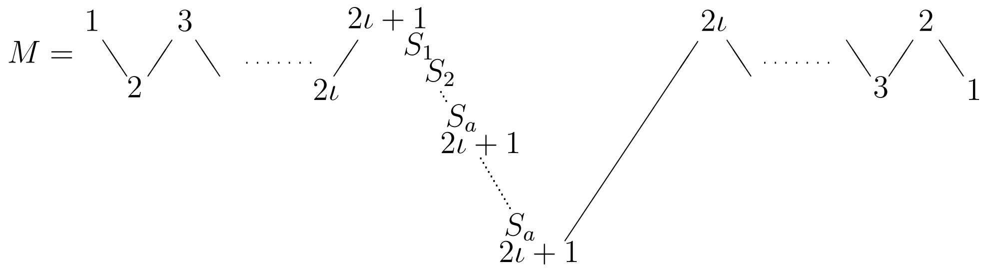
証明の方針 . Scott 加群に対応する通常指標を求めることによって，その加群としての構造も決定する.

Step1

Scott 加群に対応する通常指標における，非例外指標の因子への現れ方を決定する.

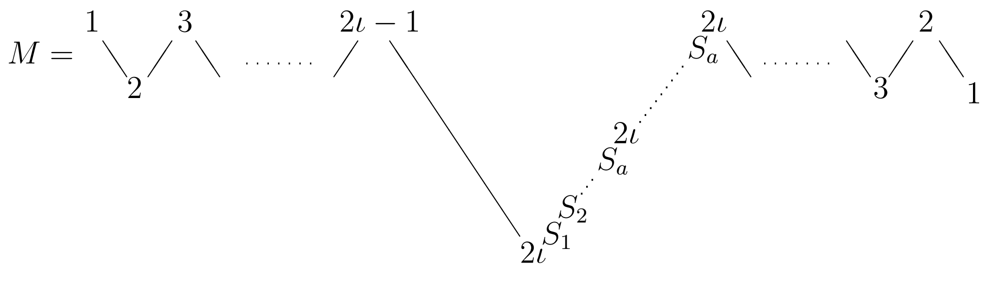
命題 5.1. M が，自明でない非射影直既約 kG-加群で，radical quotient と socle に自明な kG-加群をもつとする. このとき

(a) $\mathcal{T}(A)$ が定理 4.1 (a) の形ならば，M は次のような組成因子の構造をもつ直既約加群である.



ただし，$2 \leq \exists c \leq m$ が存在して，M の組成因子における単純加群 $2\iota+1$ の重複度は c である.

(b) $\mathcal{T}(A)$ が定理 4.1 (b) の形ならば，M は次のような組成因子の構造をもつ直既約加群である.



ただし $2 \leq \exists c \leq m$ が存在して，M の組成因子における単純加群 2ι の重複度は c である.

M の組成因子の構造を表した上の図についての詳細と，命題 5.1 の証明は，Janusz [7] §5 における，Brauer tree から直既約加群を作る方法を参照.

補題 5.2. (Landrock [9], I 章, §5, 補題 5.8 参照) F_j を単純 kG-加群，$P(F_j)$ を F_j に対応する PIM とする．M を任意の kG-加群とし，M の組成因子における F_j の重複度を c_j とすると，

$$c_j = \dim_k \left(\mathrm{Hom}_{kG}(P(F_j), M)\right).$$

命題 5.3. $0 < i < n$ に対して $M_i = \mathrm{Scott}(G, P_i)$ とすると，対応する通常指標 $\chi_{\hat{M}_i}$ は次のように表せる.

(a) $\mathcal{T}(A)$ が定理 4.1 (a) の形のとき

$$\chi_{\hat{M}_i} = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_{2\iota+1} + \sum_{j=1}^{c-1} \chi_{\lambda_{t_{a_j}}} \quad (a_j \in \{1, 2, \ldots, m\}).$$

(b) $\mathcal{T}(A)$ が定理 4.1 (b) の形のとき

$$\chi_{\hat{M}_i} = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_{2\iota} + \sum_{j=1}^{c-1} \chi_{\lambda_{t_{a_j}}} \quad (a_j \in \{1, 2, \ldots, m\}).$$

証明. 命題 5.1，補題 5.2 より従う. □

命題 5.3 より，Scott 加群に対応する通常指標における，非例外指標の現れ方が決まった.

Step2

残りの，例外指標の因子への現れ方を決定することにより，Scott 加群に対応する通常指標を完全に決定する.

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_{2\iota+1} + \sum_{p^i \,|\, t_j,\ 1 \le j \le m} \chi_{\lambda_{t_j}}$$

とおき (定理 4.1 (a) の場合)，$\chi = \chi_{\hat{M}_i}$ となることを示す.

1. 次の補題と命題より，主ブロックに属する通常指標に関しては，G の p-元と p'-元上で値が一致すれば，指標自体が一致することが分かる.

補題 5.4. (Feit [6], V 章, 系 6.3 参照) x を G に属する p-元で，$C_G(x)$ が正規 p-補群をもつものとする．χ が G の主ブロックに属する既約通常指標ならば，$C_G(x)$ の全ての p'-元 y に対して，$\chi(xy) = \chi(x)$ である．

命題 5.5. (Brauer [3], 命題 2A. 参照) G のある Sylow p-群 Q が巡回群であるとする．Q_i を Q の位数 p^i の巡回部分群とすると，$C_G(Q_i)$ は正規 p-補群をもつ $(0 < i \leq n)$.

注意 3. 任意の $g \in G$ は，G の p-元 x と $C_G(x)$ の p'-元 y を用いて $g = xy$ と表せる．また，x が G の非自明な p-元ならば，ある $Q_i \leq G$ $(i \neq 0)$ が存在して $C_G(x) = C_G(Q_i)$ なので，$C_G(x)$ は正規 p-補群をもつ．従って A に属する任意の通常指標 χ に対して，$g \in G$ が p'-元でなければ (つまり，$x \neq 1$ であれば),

$$\chi(g) = \chi(xy) = \chi(x)$$

が成り立つ.

2. また，$(G, P_i, N_G(P_1))$ に関する Green 対応を指標で考え，補題 2.4 を用いることにより，次の補題が得られる．

   補題 5.6. $0 < i < n$ に対して $M_i = \mathrm{Scott}(G, P_i)$ とする．また，M_i に対応する通常指標を $\chi_{\hat{M}_i}$ とすると，

   (a) 任意の $v' \in P - P_i$ に対し，$\chi_{\hat{M}_i}(v') = 0$.
   (b) 任意の $1 \neq v \in P_i$ に対し，$\chi_{\hat{M}_i}(v) = p^{n-i}$.
   (c) $\dim_k(M_i) \equiv p^{n-i} \pmod{p^n}$.

3. 既約通常指標の p-元上での値は，Dade [4] によってその詳細が調べられている．

4. 例外指標は p'-元上では同じ値をもつ.

以上のこと (その他の指標に関する細かな性質) を用いると，G の p-元と p'-元上で χ と $\chi_{\hat{M}_i}$ が一致することが示される．

Step3

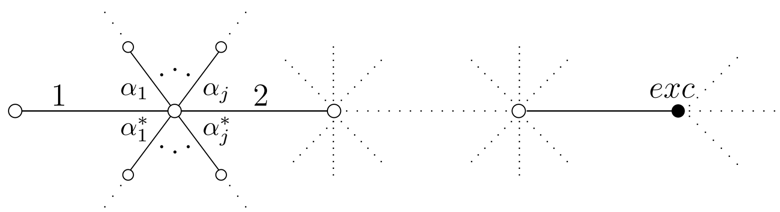
Step2 の計算から，命題 5.1 において，$M = \mathrm{Scott}(G, P_i)$ ならば

$$c = m_{n-i} + 1$$

であることが従うので ((a) の場合)，$\mathrm{Scott}(G, P_i)$ の組成因子の構造が決定する．

6　一般の Brauer tree に対する考察

一般には，主ブロックの Brauer tree の形は定理 4.1 (a) (b) で示した形以外の可能性もある．しかし，Janusz による直既約加群の作り方と，Scott 加群の自己双対性より，自明な指標に対応する頂点から例外頂点までの道に対して，対称に描けることが分かる. また，対称な辺の対に対応する加群は，互いに双対になっている.



(ただし，自明な指標に対応する頂点からは，2 本以上辺が伸びることはない.)

このとき，Scott(G, P_i) に対応する通常指標は，定理 4.1 (a) (b) と同様に，自明な指標に対応する頂点から例外頂点までの道に現れる通常指標のみを用いて表せ，その取り方も定理 4.1 (a) (b) と同じである.

Scott 加群の組成因子の構造については，Brauer tree が変われば直既約加群の組成因子に現れる単純加群が変わるので，少し違ってくる．しかし，組成因子に関係する単純加群は，自明な指標に対応する頂点から例外頂点までの道に現れる頂点から直接伸びている辺に対応する単純加群のみであり，加群の作り方はほとんど変わらない.

また，定理 4.1 では，自明な指標に対応する頂点から例外頂点までの道の長さが 1 の場合を除外しているが，このとき Scott(G, P_i) は長さ p^{n-i} の単列加群になることが分かる。そして，対応する通常指標は，定理 4.1 (a) のように取れる.

7　例

(a)

例 1. $G := PSp_4(7)$，$p = 5$ とする．このとき $P = C_{25}$，$N_G(P) = N_G(P_1) = C_{25} \rtimes C_4$，$m = 6$ である．

A の分解行列は以下の通りである．(White [12] 参照)

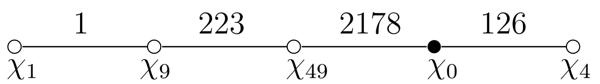
表の上段の 1，126，223，2178 は次数を用いて Brauer 指標を表している．

A	1	126	223	2178
$1 = \chi_1$	1	·	·	·
$126 = \chi_4$	·	1	·	·
$244 = \chi_9$	1	·	1	·
$2304_1 = \chi_{37}$	·	1	·	1
$2304_1 = \chi_{38}$	·	1	·	1
$2304_2 = \chi_{39}$	·	1	·	1
$2304_3 = \chi_{40}$	·	1	·	1
$2304_4 = \chi_{41}$	·	1	·	1
$2304_5 = \chi_{42}$	·	1	·	1
$2401 = \chi_{49}$	·	·	1	1

ただし，P の生成元を u，$E(25) = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{25}}$ とすると，例外指標の生成元上での値は次のようになっている．

$$\begin{aligned}
\chi_{37}(u) &= E(5) + E(5)^2 + E(5)^3 + E(5)^4 = -1 \\
\chi_{38}(u) &= E(25) + E(25)^7 + E(25)^{18} + E(25)^{24} \\
\chi_{39}(u) &= E(25)^3 + E(25)^4 + E(25)^{21} + E(25)^{22} \\
\chi_{40}(u) &= E(25)^9 + E(25)^{12} + E(25)^{13} + E(25)^{16} \\
\chi_{41}(u) &= E(25)^2 + E(25)^{11} + E(25)^{14} + E(25)^{23} \\
\chi_{42}(u) &= E(25)^6 + E(25)^8 + E(25)^{17} + E(25)^{19}
\end{aligned}$$

分解行列から $\mathcal{T}(A)$ が以下のように得られる．



$(\chi_0 = \sum_{37 \leq j \leq 42} \chi_j)$

このとき，$P_1 \cong C_5$ を vertex にもつ Scott 加群 M_1 は,

$$M_1 \cong \begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & 2178 & & & & 223 & & \\ & \diagdown & & \diagup & & 126 & & \diagup & & \diagdown & \\ & & 223 & & & & 2178 & & & & 1 \end{array}$$

また対応する通常指標は,

$$\chi_{\hat{M}_1} = \chi_1 + \chi_9 + \chi_{49} + \chi_{37}$$

である.

例 2. $G := PSL_5(3)$，$p = 11$ とする．このとき $P = C_{121}$，$N_G(P) = N_G(P_1) = C_{121} \rtimes C_5$，$m = 24$ である．

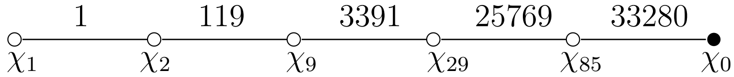
A の分解行列は以下の通りである．(奥山 [11] 参照)

A	1	119	3391	25769	33280
$1 = \chi_1$	1	·	·	·	·
$120 = \chi_2$	1	1	·	·	·
$3510 = \chi_9$	·	1	1	·	·
$29160 = \chi_{29}$	·	·	1	1	·
$33280_1 = \chi_{34}$	·	·	·	·	1
$33280_2 = \chi_{35}$	·	·	·	·	1
$33280_3 = \chi_{36}$	·	·	·	·	1
$33280_4 = \chi_{37}$	·	·	·	·	1
$33280_5 = \chi_{38}$	·	·	·	·	1
$33280_6 = \chi_{39}$	·	·	·	·	1
$33280_7 = \chi_{40}$	·	·	·	·	1
$33280_8 = \chi_{41}$	·	·	·	·	1
$33280_9 = \chi_{42}$	·	·	·	·	1
$33280_{10} = \chi_{43}$	·	·	·	·	1
$33280_{11} = \chi_{44}$	·	·	·	·	1
$33280_{12} = \chi_{45}$	·	·	·	·	1
$33280_{13} = \chi_{46}$	·	·	·	·	1
$33280_{14} = \chi_{47}$	·	·	·	·	1
$33280_{15} = \chi_{48}$	·	·	·	·	1
$33280_{16} = \chi_{49}$	·	·	·	·	1
$33280_{17} = \chi_{50}$	·	·	·	·	1
$33280_{18} = \chi_{51}$	·	·	·	·	1
$33280_{19} = \chi_{52}$	·	·	·	·	1
$33280_{20} = \chi_{53}$	·	·	·	·	1
$33280_{21} = \chi_{54}$	·	·	·	·	1
$33280_{22} = \chi_{55}$	·	·	·	·	1
$33280_{23} = \chi_{56}$	·	·	·	·	1
$33280_{24} = \chi_{57}$	·	·	·	·	1
$59049 = \chi_{85}$	·	·	·	1	1

ただし，P の生成元を u，$E(121) = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{121}}$ とすると，例外指標の生成元上での値は，

$$\chi_{34}(u) = E(11)^2 + E(11)^6 + E(11)^7 + E(11)^8 + E(11)^{10}$$
$$\chi_{35}(u) = E(11) + E(11)^3 + E(11)^4 + E(11)^5 + E(11)^9$$
$$\chi_{36}(u) = E(121)^{13} + E(121)^{39} + E(121)^{85} + E(121)^{109} + E(121)^{117}$$
$$\chi_{37}(u) = E(121)^5 + E(121)^{14} + E(121)^{15} + E(121)^{42} + E(121)^{45}$$
$$\chi_{38}(u) = E(121)^2 + E(121)^6 + E(121)^{18} + E(121)^{41} + E(121)^{54}$$
$$\chi_{39}(u) = E(121)^{61} + E(121)^{62} + E(121)^{65} + E(121)^{74} + E(121)^{101}$$
$$\chi_{40}(u) = E(121)^{35} + E(121)^{52} + E(121)^{73} + E(121)^{98} + E(121)^{105}$$
$$\chi_{41}(u) = E(121)^{19} + E(121)^{29} + E(121)^{50} + E(121)^{57} + E(121)^{87}$$
$$\chi_{42}(u) = E(121)^{17} + E(121)^{32} + E(121)^{46} + E(121)^{51} + E(121)^{96}$$
$$\chi_{43}(u) = E(121)^{10} + E(121)^{28} + E(121)^{30} + E(121)^{84} + E(121)^{90}$$
$$\chi_{44}(u) = E(121)^8 + E(121)^{24} + E(121)^{43} + E(121)^{72} + E(121)^{95}$$
$$\chi_{45}(u) = E(121)^7 + E(121)^{21} + E(121)^{63} + E(121)^{68} + E(121)^{83}$$
$$\chi_{46}(u) = E(121)^{31} + E(121)^{37} + E(121)^{91} + E(121)^{93} + E(121)^{111}$$
$$\chi_{47}(u) = E(121)^{40} + E(121)^{94} + E(121)^{112} + E(121)^{118} + E(121)^{120}$$
$$\chi_{48}(u) = E(121)^{67} + E(121)^{80} + E(121)^{103} + E(121)^{115} + E(121)^{119}$$
$$\chi_{49}(u) = E(121)^{16} + E(121)^{23} + E(121)^{48} + E(121)^{69} + E(121)^{86}$$
$$\chi_{50}(u) = E(121)^{20} + E(121)^{47} + E(121)^{56} + E(121)^{59} + E(121)^{60}$$
$$\chi_{51}(u) = E(121)^{34} + E(121)^{64} + E(121)^{71} + E(121)^{92} + E(121)^{102}$$
$$\chi_{52}(u) = E(121)^{38} + E(121)^{53} + E(121)^{58} + E(121)^{100} + E(121)^{114}$$
$$\chi_{53}(u) = E(121)^{25} + E(121)^{70} + E(121)^{75} + E(121)^{89} + E(121)^{104}$$
$$\chi_{54}(u) = E(121) + E(121)^3 + E(121)^9 + E(121)^{27} + E(121)^{81}$$
$$\chi_{55}(u) = E(121)^4 + E(121)^{12} + E(121)^{36} + E(121)^{82} + E(121)^{108}$$
$$\chi_{56}(u) = E(121)^{10} + E(121)^{28} + E(121)^{30} + E(121)^{84} + E(121)^{90}$$
$$\chi_{57}(u) = E(121)^{26} + E(121)^{49} + E(121)^{78} + E(121)^{91} + E(121)^{113}$$

分解行列から $\mathcal{T}(A)$ が以下のように得られる．



$(\chi_0 = \sum_{34 \le j \le 57} \chi_j)$

このとき，$P_1 \cong C_{11}$ を vertex にもつ Scott 加群 M_1 は,

$$M_1 \cong \begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & & & & 3391 & & & & 33280 & & & & 25769 & & & & 119 & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & 33280 & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
 & & 119 & & & & 25769 & & & & 33280 & & & & 3391 & & & & 1
\end{array}$$

である. また対応する通常指標は,

$$\chi_{\hat{M}_1} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_9 + \chi_{29} + \chi_{85} + \chi_{34} + \chi_{35}$$

である.

(b)

例 3. $G := SL_2(8)$, $p = 3$ とする．このとき $P = C_9$, $N_G(P) = N_G(P_1) = D_{18}$, $m = 4$ である．A の分解行列は以下の通りである．

A	1	7
$1 = \chi_1$	1	$\cdot$
$7_1 = \chi_2$	$\cdot$	1
$7_2 = \chi_3$	$\cdot$	1
$7_3 = \chi_4$	$\cdot$	1
$7_4 = \chi_5$	$\cdot$	1
$8 = \chi_6$	1	1

ただし，P の生成元を u, $E(9) = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{9}}$ とすると，例外指標の生成元上での値は,

$$\begin{aligned} \chi_2(u) &= -\{E(3) + E(3)^2\} = 1 \\ \chi_3(u) &= -\{E(9)^4 + E(9)^5\} \\ \chi_4(u) &= -\{E(9)^2 + E(9)^7\} \\ \chi_5(u) &= -\{E(9) + E(9)^8\} \end{aligned}$$

分解行列から $\mathcal{T}(A)$ が以下のように得られる．

$$\begin{tikzcd} \chi_1 \arrow[r, dash, "1"] & \chi_6 \arrow[r, dash, "7"] & \chi_0 \end{tikzcd}$$

$(\chi_0 = \sum_{2 \leq j \leq 5} \chi_j)$

このとき，$P_1 \cong C_3$ を vertex にもつ Scott 加群 M_1 は,

$$M_1 \cong \begin{array}{cccccccc} & & & & & 7 & & \\ 1 & & & & 7 & & \diagdown & \\ & \diagdown & & 7 & & & & 1 \\ & & 7 & & & & & \end{array}$$

である. また対応する通常指標は,

$$\chi_{\hat{M}_1} = \chi_1 + \chi_6 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$$

である.

例 4. $G := Suz(2^5)$，$p = 5$ とする．このとき $P = C_{25}$，$N_G(P) = N_G(P_1) = C_{25} \rtimes C_4$，$m = 6$ である．

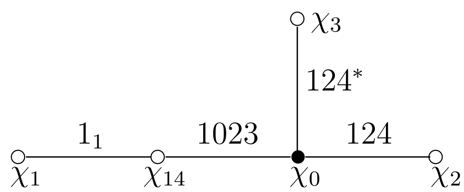
A の分解行列は以下の通りである (ただし，124^* は 124 の双対を表す).

A	1	124	124^*	1023
$1 = \chi_1$	1	·	·	·
$124 = \chi_2$	·	1	·	·
$124_2 = \chi_3$	·	·	1	·
$1024_1 = \chi_{14}$	1	·	·	1
$1271_1 = \chi_{30}$	·	1	1	1
$1271_2 = \chi_{31}$	·	1	1	1
$1271_3 = \chi_{32}$	·	1	1	1
$1271_4 = \chi_{33}$	·	1	1	1
$1271_5 = \chi_{34}$	·	1	1	1
$1271_6 = \chi_{35}$	·	1	1	1

ただし，P の生成元を u，$E(25) = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{25}}$ とすると，例外指標の生成元上での値は,

$$\begin{aligned}
\chi_{30}(u) &= -\{E(5) + E(5)^2 + E(5)^3 + E(5)^4\} = 1 \\
\chi_{31}(u) &= -\{E(25) + E(25)^7 + E(25)^{18} + E(25)^{24}\} \\
\chi_{32}(u) &= -\{E(25)^3 + E(25)^4 + E(25)^{21} + E(25)^{22}\} \\
\chi_{33}(u) &= -\{E(25)^9 + E(25)^{12} + E(25)^{13} + E(25)^{16}\} \\
\chi_{34}(u) &= -\{E(25)^2 + E(25)^{11} + E(25)^{14} + E(25)^{23}\} \\
\chi_{35}(u) &= -\{E(25)^6 + E(25)^8 + E(25)^{17} + E(25)^{19}\}
\end{aligned}$$

分解行列から $\mathcal{T}(A)$ が以下のように得られる.



(ただし $\chi_0 = \sum_{30 \leq j \leq 35} \chi_j$)

このとき，$P_1 \cong C_5$ を vertex にもつ Scott 加群 M_1 は以下の通りである．

$$M_1 \cong \begin{array}{ccc}
 & 1023 & \\
 & 124 & \\
 & 124^* & \\
 & 1023 & \\
 & 124 & \\
 & 124^* & \\
 & 1023 & \\
 & 124 & 1 \\
 & 124^* & \\
1 & 1023 & \\
 & 124 & \\
 & 124^* & \\
 & 1023 & \\
 & 124 & \\
 & 124^* & \\
 & 1023 &
\end{array}$$

また，対応する通常指標は

$$\chi_{\hat{M}_1} = \chi_1 + \chi_{14} + \chi_{31} + \chi_{32} + \chi_{33} + \chi_{34} + \chi_{35}$$

である．

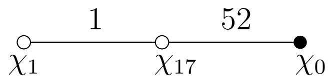
例 5. $G := PSL_2(53)$，$p = 3$ とする．このとき $P = C_{27}$，$N_G(P) = N_G(P_1) = D_{54}$，$m = 13$ である．A の分解行列は以下の通りである．

A	1	52
$1 = \chi_1$	1	·
$52_1 = \chi_4$	·	1
$52_2 = \chi_5$	·	1
$52_3 = \chi_6$	·	1
$52_4 = \chi_7$	·	1
$52_5 = \chi_8$	·	1
$52_6 = \chi_9$	·	1
$52_7 = \chi_{10}$	·	1
$52_8 = \chi_{11}$	·	1
$52_9 = \chi_{12}$	·	1
$52_{10} = \chi_{13}$	·	1
$52_{11} = \chi_{14}$	·	1
$52_{12} = \chi_{15}$	·	1
$52_{13} = \chi_{16}$	·	1
$53 = \chi_{17}$	1	1

P の生成元を u，$E(27) = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{27}}$ とすると，例外指標の生成元上での値は，

$$\begin{aligned}
\chi_4(u) &= -\{E(3) + E(3)^2\} = 1\\
\chi_5(u) &= -\{E(27)^{11} + E(27)^{16}\}\\
\chi_6(u) &= -\{E(27)^{2} + E(27)^{25}\}\\
\chi_7(u) &= -\{E(27)^{7} + E(27)^{20}\}\\
\chi_8(u) &= -\{E(27)^{4} + E(27)^{23}\}\\
\chi_9(u) &= -\{E(27)^{5} + E(27)^{22}\}\\
\chi_{10}(u) &= -\{E(27)^{13} + E(27)^{14}\}\\
\chi_{11}(u) &= -\{E(27)^{8} + E(27)^{19}\}\\
\chi_{12}(u) &= -\{E(27)^{10} + E(27)^{17}\}\\
\chi_{13}(u) &= -\{E(27) + E(27)^{26}\}\\
\chi_{14}(u) &= -\{E(9)^{2} + E(9)^{7}\}\\
\chi_{15}(u) &= -\{E(9)^{4} + E(9)^{5}\}\\
\chi_{16}(u) &= -\{E(9) + E(9)^{8}\}
\end{aligned}$$

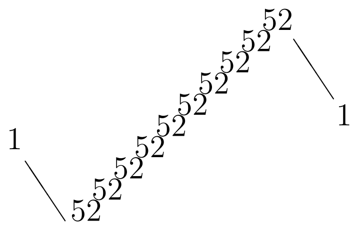
分解行列から $\mathcal{T}(A)$ が以下のように得られる.



(ただし $\chi_0 = \sum_{4\le j\le 16}\chi_j$)

このとき，$P_1 \cong C_3$ を vertex にもつ Scott 加群 M_1 は以下の通りである.

$M_1 \cong$

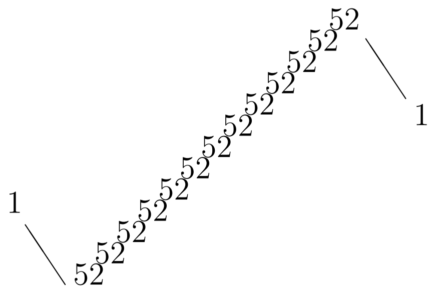


対応する通常指標は,

$$\chi_{\hat{M}_1} = \chi_1 + \chi_{17} + \sum_{5\le j\le 13}\chi_j$$

である. また，$P_1 \cong C_9$ を vertex にもつ Scott 加群 M_2 は以下の通りである.

$M_1 \cong$



対応する通常指標は,

$$\chi_{\hat{M}_2} = \chi_1 + \chi_{17} + \sum_{5\le j\le 16}\chi_j$$

である.

参考文献

[1] Alperin, J.L. : Local Representation Theory, Cambrige Univ. Press, Cambridge (1986).

[2] Brauer, R. : On finite groups with cyclic Sylow subgroups, I, J.Algebra **40** (1976), 233-261.

[3] Brauer, R. : On finite groups with cyclic Sylow subgroups, II, J.Algebra **58** (1979), 305-332.

[4] Dade, E.C. : Blocks with cyclic defect groups, Ann. of Math. **84** (1966), 20-48.

[5] Dornhoff, L. : Group Representation Theory, PartB, Dekker, New York (1972).

[6] Feit, W. : The Representation Theory of Finite Groups, North Holland, Amsterdam, London, 1981.

[7] Janusz, G.J. : Indecomposable modules for finite groups, Ann. of Math. (2), 209-241.

[8] Koshitani, S., Kunugi, N. : Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, To appear in Math.Z.

[9] Landrock, P. : Finite Group Algebras and Their Modules, London Math. Society Lecture Note Series, Vol.84, London Math. Soc., Cambridge (1983).

[10] 永尾汎, 津島行男 : 有限群の表現, 数学選書 8, 裳華房 (1987).

[11] 奥山哲郎 : 有限群の表現論におけるブルエ予想をめぐって, 第 51 回代数学シンポジウム報告集 (2006), 23-33.

[12] White, L.D. : Brauer trees of $Sp(4, q)$, Comm. Algebra, **20** (1992), 645-653.