線形の微分方程式に関するガロア理論と
その応用について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　斎藤　克典

初めに今回若手研究会に参加させて頂きありがとうございます．講演の機会を頂いた世話人の方々にお礼を申し上げます．この報告書は, 第 15 回若手研究会において発表した内容について, 話せなかった内容も含めてまとめたものである．

1　準備

物理学や天文学において, 運動方程式を解き大域的な解を具体的な形で求めるということは非常に重要な問題である．しかし, 多くの力学系においては大域的な解を記述することは出来ない．そこで, いつ解が求められるか, つまりいつ”可積分”になるかを考えることは非常に重要である．

Definition 1 W を $\mathbb{R}$(または $\mathbb{C}$) 上の C^∞ 級多様体とする．W 上の非退化閉 2 次微分形式 ω を W の **Symplectic 形式**という．多様体 W に Symplectic 形式 ω が 1 つ与えられたとき, (W,ω) または単に W を **Symplectic 多様体**という．Symplectic 多様体の次元は常に偶数である．

Definition 2 Symplectic 多様体には, 任意の関数 $H \in C^\infty(W)$ に対し,

$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot)$$

で定まるベクトル場 X_H を付随できる． このベクトル場 X_H を, H によって定まる **Hamilton ベクトル場**という．また, Hamilton ベクトル場により定まる微分方程式系のことを H に付随する **Hamilton 系**といい, H をその **Hamiltonian** という．

Definition 3 Symplectic 多様体 W は, $C^\infty(W)$ 上に括弧 $\{\ ,\ \}$

$$\{f, g\} = \omega(X_g, X_f) = dg(X_f)$$

が定義できる．この括弧 $\{\ ,\ \}$ を **Poisson 括弧**という．

$\{\ ,\ \}$ は定義により, 双線形, 歪対称で, Leibniz 則を満たす．また ω が閉形式であるから, Jacobi の恒等式を満たす． このような Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}$ を持つような多様体を,

Poisson 多様体という. $f,g \in C^\infty(W)$ が $\{f,g\}=0$ を満たすとき, f,g は **Poisson 可換**であるまたは単に**可換**であるという.

Definition 4 Hamiltonian$H$ に付随する Hamilton 系に対し, H と Poisson 可換になる任意の関数 $f \in C^\infty(W)$ を Hamilton 系の**第 1 積分**という.

Definition 5 $2n$ 次元 Symplectic 多様体 W 上の Hamilton 系が, 関数的に独立で, 互いに Poisson 可換な n 個の第 1 積分 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ を持つとき, **完全可積分**または単に**可積分**という.

注意 1 一般には Hamilton 系や可積分系は Poisson 多様体上で定義される.

Definition 6 一般に微分方程式系

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \cdots, x_N) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{1}$$

をある特殊解 $x_i = \phi_i(t)$, $(i = 1, 2, \cdots, N)$ の周りで漸近展開した時の 1 階の部分

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_N(t))\xi_j \tag{2}$$

を変分方程式と呼ぶ.

以下で考える可積分系は, 第一積分が有理型であるようなものを考える.

2 可積分性に対する結果たち

V が $2n$ 次元実 Symplectic 多様体で, $\Gamma := \{z = z(t)\}$ が周期 T を持つ軌道の場合, つまり $z(t+T) = z(t)$ が成り立つ場合を考える. このとき Γ に沿った変分方程式は周期係数を持つ微分方程式系になる. このとき $U(t)$ を Γ に沿った変分方程式の基本行列で, $U(0) = I_{2n}$ を満たすものとすると, 任意の点 $p \in \Gamma$ と $\xi \in T_pM$ に対して $\xi = U(T)\xi$ が成り立つ. $M = U(T)$ をモノドロミー行列といい, その固有値を周期軌道 Γ の乗数という. V が Symplectic であったから, $M \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ である. したがって λ が乗数ならば λ^{-1} も乗数である. Poincaré はこの場合に次を示した.

Theorem 1 (Poincaré[5]) 実 $2n$ 次元 Symplectic 多様体 (V, ω) 上の H に付随する Hamilton 系が, 互いに可換で, 周期的な軌道 Γ 上で関数的に独立な k 個 $(k \leq n)$ の第 1 積分を持つとする. このとき, 少なくとも $2k$ 個の Γ の乗数が 1 でなければならない.

この定理の系として次が得られる.

系 1 Γ を完全可積分な Hamilton 系 X_H の周期解とする. $f_1 = H, \cdots, f_n$ を可換でかつ Γ 上で独立となる第 1 積分とする. このとき Γ の $2n$ 個の乗数は 1 である.

この系から, 定理の仮定が成り立ちかつ, Γ が 1 でない乗数を持つ場合には元の Hamilton 系が可積分でないことが分かる.

Ziglin は, Poincaré の定理を複素 Symplectic 多様体の上に拡張させ, 有理型の第 1 積分の存在に対して述べた. Ziglin は直交変分方程式に対して次の定理を証明した.

Theorem 2 (Ziglin[6]) 複素 $2n$ 次元 Symplectic 多様体 V 上の Hamilton 系に対し, Γ の近傍で, Hamiltonian および変分方程式の階数を落とすために用いた第 1 積分たちと独立な $n-k$ 個の有理型の第 1 積分 $f_1, \cdots, f_k$ がとれたとする. このとき直交変分方程式のモノドロミー群に非共鳴な元 g が存在するとき, モノドロミー群の他の元は g の固有ベクトルをまた g の固有ベクトルに移すようなものになっている.

ここで, 直交変分方程式のモノドロミー群は Symplectic 群 $\mathrm{Sp}(2(n-k), \mathbb{C})$ に含まれる. 一般に Symplectic 群 $\mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C})$ の元 g が共鳴であるとは, 固有値 $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_m, \lambda_m^{-1}$ に対して, $(r_1, \cdots, r_m) \in \mathbb{Z}^m \backslash \{(0, \cdots, 0)\}$ が存在して $\lambda_1^{r_1} \cdots \lambda_m^{r_m} = 1$ が成り立つことである.
これらを踏まえ, Morales-Ruiz と Ramis は次を証明した.

Theorem 3 (Morales-Ruiz, Ramis [3]) 複素 $2n$ 次元 Symplectic 多様体 V 上の Hamilton 系に対し, Γ の近傍で独立で, 互いに可換な n 個の有理型の第 1 積分を持つと仮定する. このとき Γ に沿った (直交) 変分方程式のガロア群はモノドロミー群の Zariski 閉包であり, 特にその単位成分は可換である.

Theorem3 によりガロア群を用いて Hamilton 系の可積分性を判定することができる.

3 Hénon-Heiles 系

今回は, 次の具体的な $\mathbb{C}^4$ 上の Hamilton 系を考え, その可積分性の判定をどのように行うかの概略を述べる.

Definition 7 Symplectic 多様体 $(\mathbb{C}^4, \sum_{i=1}^{2} dp_i \wedge dq_i)$ 上で $A, B, \lambda \in \mathbb{R}$ をパラメーター

とする Hamiltonian

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(Aq_1^2 + Bq_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{\lambda}{3}q_2^3$$

により表される Hamilton 系を, **Hénon-Heiles 系**という.

これから得られる微分方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} \dot{q_1} &= p_1 & \dot{p_1} &= -Aq_1 + 2q_1q_2 \\ \dot{q_2} &= p_2 & \dot{p_2} &= -Bq_2 + q_1^2 + \lambda q_2^2 \end{aligned} \tag{3}$$

となる. ただし $\cdot = \frac{d}{dt}$.
今回, 具体的に書ける特殊解を取り, その解の周りの変分方程式から変数変換を行って超幾何微分方程式を得た. 以下では $\lambda, B \neq 0$ とする. まず次の具体的な解を取る.

Lemma 1 $e(t) = \exp\sqrt{-B}t$ とおく.

$$(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)) = (0, -\frac{6Be(t)}{\lambda(e(t)-1)^2}, 0, \frac{6B\sqrt{-B}e(t)(e(t)+1)}{\lambda(e(t)-1)^3})$$

とする. このとき $H(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ となる, Hénon-Heiles 系の解である.

この解に対する変分方程式は

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= P_1 & \dot{P}_1 &= -AQ_1 + 2x_2(t)Q_1 \\ \dot{Q}_2 &= P_2 & \dot{P}_2 &= -BQ_2 + 2\lambda x_2(t)Q_2 \end{aligned}$$

となる. この方程式系は $\mathbb{C}(t, x_2, y_2) = \mathbb{C}(t, e(t))$ 上の微分方程式系である. ここで, Morales-Ruiz, Ramis の Theorem3 により, 与えられている系が可積分であるならば, この変分方程式のガロア群の単位成分は可換である. そこで, ガロア群が可換にならない条件が求まれば, その場合は可積分にならないということが言える.
今, 変分方程式が添え字 1 と 2 の方程式に分けられており, もし元のガロア群が可換ならば各々を $\mathbb{C}(t, e(t))$ 上の 2 階の微分方程式と見た時そのガロア群は可換である. このとき 1 階の係数が 0 なので各々ガロア群は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ に入ることが分かる. また添え字 2 に対する方程式は $\mathbb{C}(t, e(t))$ 上で解 $(Q_2, P_2) = (y_2(t), \dot{y_2}(t))$ を持ち, ガロア群が $\mathbf{G_a}$ に含まれることが分かる. こちらからは条件が出ない.

そこで以下では, 添え字 1 に対する $\mathbb{C}(t, e(t))$ 上の 2 階の微分方程式だけを考える.
次の定理が今回主となる結果である.

Theorem 4 (S) $e(t) = z$ という変数変換により, 2 階の微分方程式

$$\ddot{Q} = -AQ + 2x_2(t)Q$$

(ただし $Q_1 = Q$ と書き直した) は $\mathbb{C}(z)$ 上の Gauss の超幾何微分方程式

$$\frac{d^2Q}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dQ}{dz} + \left(\frac{-c}{z^2} + \frac{-d}{(z-1)^2} + \frac{d}{z(z-1)}\right)Q = 0$$

になる. ただし $c = \frac{A}{B}, d = -\frac{12}{\lambda}$

さらに, 次が言える.

Lemma 2 元の系の変分方程式のガロア群の単位成分が可換であるためには, 上の $\mathbb{C}(z)$ 上の超幾何微分方程式のガロア群の単位成分が可解群であることが必要である.

ここで上の超幾何微分方程式の確定特異点 $0, 1, \infty$ における指数の差 $(\hat{\lambda}, \hat{\nu}, \hat{\mu}) = (2\sqrt{c}, 2\sqrt{1+4d}, 2\sqrt{c})$ を考える. 木村俊房氏により, 超幾何微分方程式のガロア群の単位成分の可解性に関して, 指数の差に関する必要十分条件が得られている.

Theorem 5 (木村) [2] 一般にガウスの超幾何微分方程式が可解となるための必要十分条件は, 確定特異点 $z = 0, 1, \infty$ における指数の差 $\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$ が, その順序を無視して次の条件のいずれかを満たすことである.

(1) $\hat{\lambda} \pm \hat{\mu} \pm \hat{\nu}$ の少なくとも 1 つが奇整数である.
(2) $\pm\hat{\lambda}, \pm\hat{\mu}, \pm\hat{\nu}$ が Schwarz の表の値をとる.
(3) $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) = \left(\frac{1}{2} + \text{整数}, \frac{1}{2} + \text{整数}, \text{任意}\right)$

ここで用いた超幾何微分方程式に直すというアイディアは, 吉田春夫氏が最初同次ポテンシャルを持つ Hamilton 系に対して行った. 得られた超幾何微分方程式のガロア群を見るというのは Morales-Ruiz, Ramis らによるものである.

この定理を用いると系として例えば $A = B$ の場合次が得られる.

系 2 $A = B$ の時, 元のハミルトン系が可積分ならば, $\lambda = \frac{12}{k(k+1)}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ である.

実際には, $A = B$ の場合には $\lambda = 1, 6$ の場合に元の系は可積分になり, 他の系は可積分にはならないことが知られている. それらは, 別の解の周りで線形化した方程式を用いたり, 高次の変分方程式を見ることで示されている. ([4]), ([1])

表 1　Schwarz の表

1	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{2}+m$	$\frac{1}{N}+n$	$N\in\mathbb{N},\quad l,m,n\in\mathbb{Z}$
2	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z}$
3	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
4	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{4}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z}$
5	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{4}+m$	$\frac{1}{4}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
6	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z}$
7	$\frac{2}{5}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
8	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{5}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
9	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
10	$\frac{3}{5}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
11	$\frac{2}{5}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{2}{5}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
12	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
13	$\frac{4}{5}+l$	$\frac{1}{5}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
14	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数
15	$\frac{3}{5}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l,m,n\in\mathbb{Z},\quad l+m+n=$ 偶数

参考文献

[1] M. Audin, Intégrabilité et Non-intégrabilité de Systèmes Hamiltoniens, Séminaire BOURBAKI, 53(2000-2001), no. 884, p. 113-135

[2] T. Kimura, On Riemann's Equations which are Solvable by Quadratures, Funkcialaj Ekvacioj 12 (1969), p. 269-281.

[3] J. J. Morales-Ruiz, Differential Galois Theory and Non-Integrability of hamiltonian Systems, Birkhäuser, 1999.

[4] J. J. Morales-Ruiz, J-P Ramis and C. Simó, Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Groups of higher Variational Equations, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4-40 No.6 (2007), p. 845-884.

[5] H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. I., Gauthiers-Villars, Paris, 1892.

[6] S. L. Ziglin, Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I, Funct. Anal. Appl. 17 (1983), p. 181-189.