

On a relation between canonical basis and Enyang's basis of B-M-W algebra

名古屋大学 多元数理科学研究科

沖中 智史

平成22年3月5日

話の概要を知って頂く為に, 講演者が発表当日に使ったスライドを掲載します.
より詳しい内容をお知りになりたい方は, 最後に挙げた参考文献をご参照下さい.

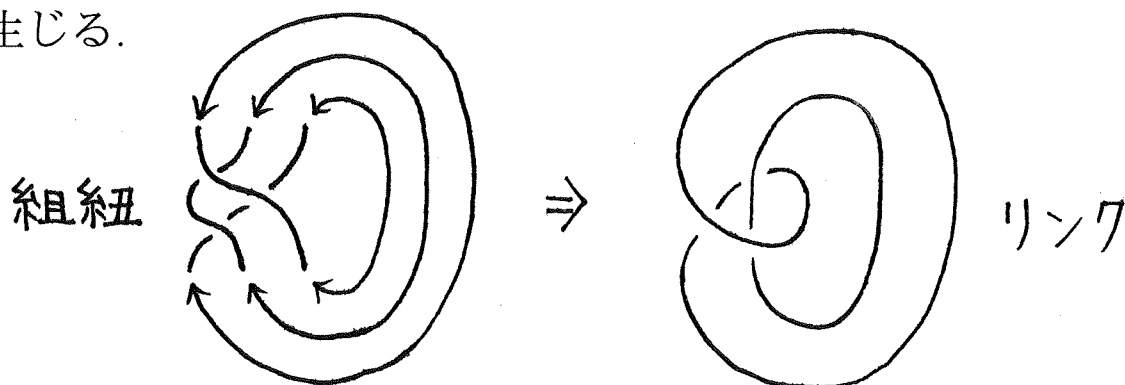
1 B-M-W 代数の起源

※ B : Birman M : Murakami W : Wenzl

B-M-W 代数は, Kauffman 多項式と呼ばれるリンク不変量の研究より発生した.

結び目理論の研究目的の 1 つに, 連続変形で同値である
と見なしたリンクを分類するための不変量の構成がある.

ここで, 任意のリンクは, ある組紐の両端をつなぎ合わせて得られることにより, 結び目理論と組紐群との関連が生じる.



具体的には, 次のような関係がある.

リンクの連続変形による不変量
= 平面射影図の Reidemeister 変形による不変量
 \Leftrightarrow 組紐群の合併上の Markov 変形で不変なトレース

このとき, 組紐群と深く関係する代数上のトレースを考
えることにより, 次のリンク不変量を構成できることが知
られている.

HOMFLY 多項式 \leftarrow 岩堀-Hecke 代数
Kauffman 多項式 \leftarrow B-M-W 代数

2 B-M-W代数とは

定義 1. $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, r^{\pm 1}, (q - q^{-1})^{-1}]$ とする. このとき, Birman-Murakami-Wenzl代数 \mathcal{B}_n は $T_i (1 \leq i < n)$ で生成され, 次の関係式を満たす結合的 R -代数である.

$$\begin{aligned} (q - q^{-1})(1 - E_i) &= T_i - T_i^{-1} \\ (T_i - q)(T_i - r^{-1})(T_i + q^{-1}) &= 0 \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \\ T_i T_j &= T_j T_i, \quad \text{if } |i - j| \geq 2 \\ E_{i+1} T_i^{\pm 1} E_{i+1} &= r^{\pm 1} E_{i+1} \\ E_{i-1} T_i^{\pm 1} E_{i-1} &= r^{\pm 1} E_{i-1} \\ E_i T_i &= T_i E_i = r^{-1} E_i \end{aligned}$$

この代数は岩堀-Hecke代数と深く関係している.

命題 1. I を E_1 で生成される \mathcal{B}_n のイデアルとする. このとき, 次の同型対応が存在する.

$$\mathcal{B}_n / I \cong \mathcal{H}_n \quad ; \quad T_i + I \mapsto X_i$$

ただし, \mathcal{H}_n は岩堀-Hecke代数を表す. \mathcal{H}_n は $X_i (1 \leq i < n)$ で生成され, 次の関係式を満たす結合的 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -代数である.

$$\begin{aligned} (X_i - q)(X_i + q^{-1}) &= 0 \\ X_i X_{i+1} X_i &= X_{i+1} X_i X_{i+1} \\ X_i X_j &= X_j X_i, \quad \text{if } |i - j| \geq 2 \end{aligned}$$

この代数を n -tangle を用いて構成することができる.

$$T_i = \begin{array}{c} 1 \quad i \quad i+1 \quad n \\ \left| \quad \left| \quad \left| \quad \left| \right. \right. \right. \\ \dots \quad \left. \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right. \quad \dots \\ \left. \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right. \quad \left. \left. \right. \right. \end{array}, \quad T_i^{-1} = \begin{array}{c} 1 \quad i \quad i+1 \quad n \\ \left| \quad \left| \quad \left| \quad \left| \right. \right. \right. \\ \dots \quad \left. \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right. \quad \dots \\ \left. \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right. \quad \left. \left. \right. \right. \end{array}$$

$$E_i = \begin{array}{c} 1 \quad i \quad i+1 \quad n \\ \left| \quad \left| \quad \left| \quad \left| \right. \right. \right. \\ \dots \quad \left. \begin{array}{c} \cup \\ \dots \\ \cap \end{array} \right. \quad \dots \\ \left. \begin{array}{c} \cup \\ \dots \\ \cap \end{array} \right. \quad \left. \left. \right. \right. \end{array}, \quad 1 = \begin{array}{c} 1 \quad n \\ \left| \quad \left| \right. \right. \\ \dots \quad \dots \end{array}$$

命題 2. M_n を上の $T_1^{\pm 1}, \dots, T_{n-1}^{\pm 1}, E_1, \dots, E_{n-1}, 1$ で生成される n -tangle の集合とする. このとき, B_n は次の関係式を満たす, モノイド代数 $R[M_n]$ の商代数である.

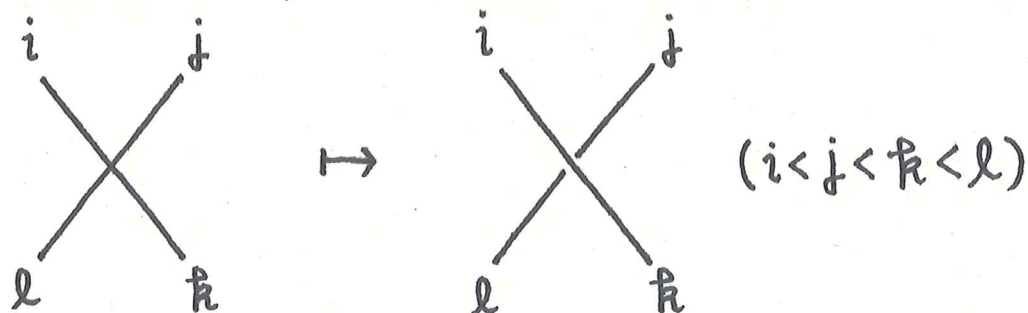
$$(1) \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + (q - q^{-1}) \left| \quad \left| \right. \right. - (q - q^{-1}) \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagdown \end{array} = r^{-1} \left| \quad \right. \quad (3) \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagup \end{array} = r \left| \quad \right.$$

$$(4) \quad \bigcirc = \frac{r - r^{-1}}{q - q^{-1}} + 1$$

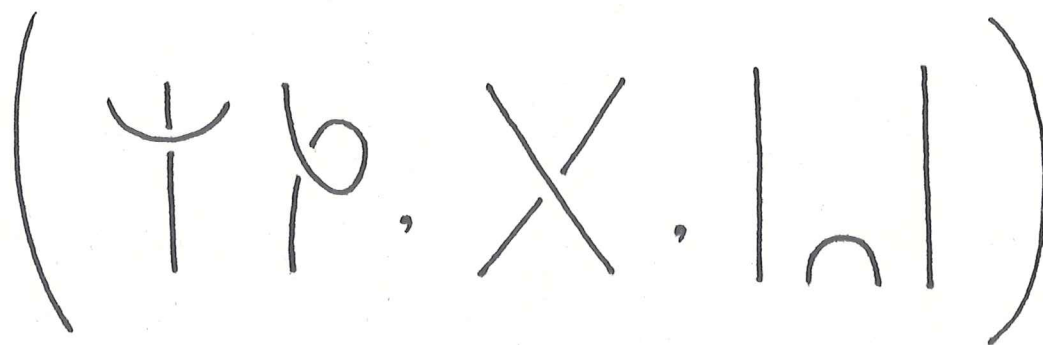
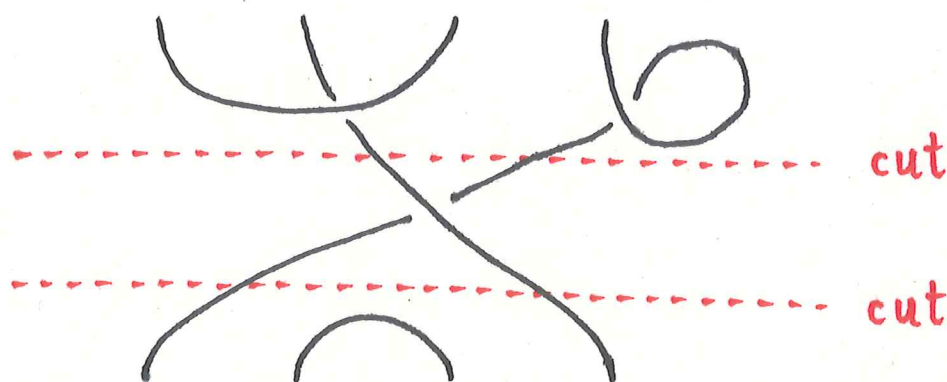
命題 3. B_n を n -Brauer 図形全体の集合とする.

このとき, 集合 $\{T_d \mid d \in B_n\}$ は B_n の基底をなす. 但し, T とは次で定義される, 各交差を解消する写像を表す.



上の命題で得られた基底を, B_n の自然な基底と呼ぶ.

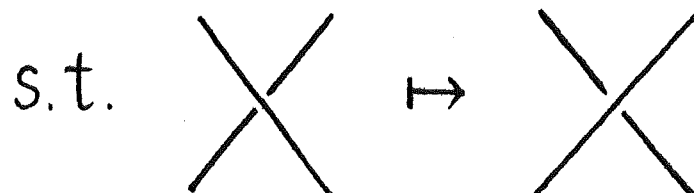
このとき, B_n の元は図形を切断することにより, 3つの部分から成り立っていることが分かる.



3 canonical basis の存在

定義 2. B_n における *involution* $\bar{}$ を, 次の 2 点を満たす写像として定義する.

- 各元の交差部分における上下関係を逆転させる



- 各元の係数に対して, $q \mapsto q^{-1}$, $r \mapsto r^{-1}$ を施す

このとき, 次の関係式が成立する.

$$\overline{T_d} = T_d + \sum_{d': l(d') < l(d)} r_{d'd} T_{d'}, \quad r_{d'd} \in \mathbb{Z}[(q - q^{-1})]$$

ただし, $l(d)$ は $d \in B_n$ に含まれる交差の数を表すとする.

命題 4 (Fishel-Grojnowski, 1995).

上記の *involution* に対して, 次の性質を満たす基底 $\{C_d \mid d \in B_n\}$ が一意的に存在する.

- $\overline{C_d} = C_d$

•

$$C_d = T_d + \sum_{d': l(d') < l(d)} P_{d'd} T_{d'},$$

ただし, $P_{d'd} \in q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]$

上の命題で得られた基底を, B_n の canonical basis と呼ぶ.

基底 $\{C_d\}$ を計算していくと, 次のような表示を得る.

$$C_{T_i} = T_i + q^{-1} - q^{-1}E_i$$

$$\begin{aligned} C_{T_i T_{i+1}} &= T_i T_{i+1} + q^{-1}T_i + q^{-1}T_{i+1} - q^{-1}T_i E_{i+1} \\ &\quad - q^{-1}\underline{E_i E_{i+1} T_i} - q^{-2}E_{i+1} + q^{-2} \\ &= T_i T_{i+1} + q^{-1}T_i + q^{-1}T_{i+1} - q^{-1}T_i E_{i+1} \\ &\quad - q^{-1}\underline{E_i T_{i+1}^{-1}} - q^{-2}E_{i+1} + q^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{T_i T_{i+1} T_i} &= T_i T_{i+1} T_i + q^{-1}T_i T_{i+1} + q^{-1}T_{i+1} T_i - q^{-1}T_i E_{i+1} T_i \\ &\quad + q^{-2}T_i + q^{-2}T_{i+1} - q^{-2}T_i E_{i+1} - q^{-2}E_{i+1} T_i \\ &\quad - q^{-1}E_i - q^{-3}E_{i+1} + q^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{T_i T_{i+1} T_{i+2}} &= T_i T_{i+1} T_{i+2} + q^{-1}T_i T_{i+1} + q^{-1}T_{i+1} T_{i+2} + q^{-1}T_i T_{i+2} \\ &\quad - q^{-1}T_i T_{i+1} E_{i+2} - q^{-1}\underline{T_i E_{i+1} E_{i+2} T_{i+1}} \\ &\quad - q^{-1}\underline{E_i E_{i+1} E_{i+2} T_{i+1} T_i} + q^{-2}T_i + q^{-2}T_{i+1} + q^{-2}T_{i+2} \\ &\quad - q^{-2}T_i E_{i+2} - q^{-2}T_{i+1} E_{i+2} - q^{-2}\underline{E_{i+1} E_{i+2} T_{i+1}} \\ &\quad + q^{-1}E_i E_{i+2} - q^{-1}E_i - q^{-3}E_{i+2} + q^{-3} \\ &= T_i T_{i+1} T_{i+2} + q^{-1}T_i T_{i+1} + q^{-1}T_{i+1} T_{i+2} + q^{-1}T_i T_{i+2} \\ &\quad - q^{-1}T_i T_{i+1} E_{i+2} - q^{-1}\underline{T_i E_{i+1} T_{i+2}^{-1}} \\ &\quad - q^{-1}\underline{E_i T_{i+1}^{-1} T_{i+2}^{-1}} + q^{-2}T_i + q^{-2}T_{i+1} + q^{-2}T_{i+2} \\ &\quad - q^{-2}T_i E_{i+2} - q^{-2}T_{i+1} E_{i+2} - q^{-2}\underline{E_{i+1} T_{i+2}^{-1}} \\ &\quad + q^{-1}E_i E_{i+2} - q^{-1}E_i - q^{-3}E_{i+2} + q^{-3} \end{aligned}$$

4 計算の仕方と注意点

計算方法を紹介する.

- まず, Kauffman 関係式 $(q - q^{-1})(1 - E_i) = T_i - T_i^{-1}$ の変形により, $C_{T_i} = T_i + q^{-1} - q^{-1}E_i$ が involution で不変であることが分かる. また, $C_{E_i} = E_i$ も分かる.
- 次に, 自然な基底の生成元による組み立て方を調べておいて, その各生成元を canonical base の表示に置き換えて展開し, 条件にそぐわない係数が除去されるように, 既存の canonical base による引き算を行う.
- 得られた基底は, 作り方から明らかに involution による不変性を満たしているので, 係数の形を整えば, 一意性により表示が決まる.

例

$$\begin{aligned} C_{T_i T_{i+1}} &: = C_{T_i} C_{T_{i+1}} + C_{E_i} - C_{E_i E_{i+1}} \\ &= C_{T_i} C_{T_{i+1}} + E_i(1 - E_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{T_i T_{i+1} T_i} &: = C_{T_i T_{i+1}} C_{T_i} - C_{T_i} + C_{E_i E_{i+1} T_i} \\ &= C_{T_i} C_{T_{i+1}} C_{T_i} - (1 - E_i) C_{T_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{T_i T_{i+1} T_{i+2}} &: = C_{T_i T_{i+1}} C_{T_{i+2}} - C_{T_i E_{i+1} E_{i+2}} + C_{T_i E_{i+1}} \\ &\quad - C_{E_i E_{i+1} E_{i+2} T_i} + C_{E_i E_{i+1} T_i} \\ &= C_{T_i} C_{T_{i+1}} C_{T_{i+2}} + E_i(1 - E_{i+1}) C_{T_{i+2}} \\ &\quad + C_{T_i} E_{i+1}(1 - E_{i+2}) + E_i E_{i+1} C_{T_i}(1 - E_{i+2}) \end{aligned}$$

計算に関する注意点を幾つか挙げる.

- ブレイド関係式による変形で, 基底の構成の仕方に変化が生じている.

例

$$C_{T_i T_{i+1} T_i} = C_{T_{i+1} T_i T_{i+1}} \text{ であるが, 両辺はそれぞれ}$$

$$C_{T_i T_{i+1} T_i} = C_{T_i} C_{T_{i+1}} C_{T_i} - (1 - E_i) C_{T_i},$$

$$C_{T_{i+1} T_i T_{i+1}} = C_{T_{i+1}} C_{T_i} C_{T_{i+1}} - (1 - E_{i+1}) C_{T_{i+1}} \\ + \frac{1}{q - q^{-1}} (T_{i+1} E_i T_{i+1} - T_i E_{i+1} T_i)$$

と組み立てる必要があり, 左右の表示の作り方にズレが生じてしまう.

- 半順序の設定は, 岩堀-Hecke代数のときに使う Bruhat-Chevalley 順序の拡張とみなすことができ, 具体的には, T_i の形の元を消去するか, E_i にすり替えることで小さくなる順序となる.

例

$$T_i T_{i+1} > T_i, T_{i+1}, E_i T_{i+1}^{-1}, T_i E_{i+1}$$

ただし, この半順序は自然な基底の表示の取り方に依存してしまっているので, 関係式による変形を行っても半順序が well-defined に定まるように, ある規則でインバースを施す必要がある.

例

$$T_{i+1} T_i T_{i+1} = T_i T_{i+1} T_i > E_i E_{i+1} T_i = E_i T_{i+1}^{-1}$$

5 Enyang's basis との比較

\mathcal{B}^f を $E_1 E_3 \cdots E_{2f-1}$ で生成される \mathcal{B}_n のイデアルとし、次のフィルトレーションを考える.

$$0 = \mathcal{B}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \subset \cdots \subset \mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}^0 = \mathcal{B}_n$$

このフィルトレーションの各商において、次の写像が定義できる.

$$\begin{aligned} \iota_f : \mathcal{H}_{n-2f} &\rightarrow \mathcal{B}^f / \mathcal{B}^{f+1}; \\ X_i &\mapsto E_1 E_3 \cdots E_{2f-1} T_{2f+i} + \mathcal{B}^{f+1} \end{aligned}$$

これより、岩堀-Hecke 代数の構造を用いた考察ができる.

命題 5 (Enyang, 2007).

\mathcal{B}_n は次で定まる *cellular* 基底を持つ.

$$\left\{ m_{st} = b_s^* \left(E_1 E_3 \cdots E_{2f-1} \sum_{w \in \mathfrak{S}_\lambda} q^{l(w)} T_w \right) b_t \mid \begin{array}{l} s, t \in \mathfrak{T}_n(\lambda), \lambda \vdash n - 2f \text{ and } 0 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{array} \right\}$$

ただし、 $*$ は次を満たす反自己同型写像とする.

$$* : T_i \mapsto T_i, \quad E_i \mapsto E_i$$

また、 $\mathfrak{T}_n(\lambda)$ は \mathcal{B}_n の Bratteli 図におけるシェイプ λ の path 全体の集合とし、各 $t \in \mathfrak{T}_n(\lambda)$ に対して、 b_t は \mathcal{B}_{n-1} のセル加群の基底の持ち上げから一意的に決まる元とする.

上の命題の基底は、岩堀-Hecke 代数に存在する Murphy 基底を B-M-W 代数に誘導して作った基底になっている.

\mathcal{B}_3 における canonical basis から Enyang's Jucys-Murphy basis への変換行列

| $can \setminus JM$ | E_1 | $E_1E_2T_1$ | $T_1E_2E_1$ | E_1E_2 | E_2E_1 | $T_1E_2T_1$ | E_2T_1 | T_1E_2 | E_2 | $T_1T_2T_1$ | T_1 | T_1T_2 | T_2T_1 | T_2 | 1 |
|--------------------|-----------|-------------|-------------|----------|-----------|-------------|-----------|-----------|-------|-------------|----------|----------|----------|-------|---|
| E_1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E_1E_2T_1$ | $-q^{-1}$ | q^{-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $T_1E_2E_1$ | $-q^{-1}$ | 0 | q^{-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E_1E_2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E_2E_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $T_1E_2T_1$ | q^{-2} | $-q^{-2}$ | $-q^{-2}$ | 0 | 0 | q^{-2} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E_2T_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-q^{-1}$ | 0 | q^{-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| T_1E_2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | q^{-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E_2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $T_1T_2T_1$ | $-q^{-1}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-q^{-3}$ | 0 | 0 | 0 | q^{-3} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| T_1 | $-q^{-1}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | q^{-1} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| T_1T_2 | 0 | $-q^{-2}$ | 0 | q^{-2} | 0 | 0 | 0 | $-q^{-2}$ | 0 | 0 | q^{-2} | q^{-1} | 0 | 0 | 0 |
| T_2T_1 | 0 | 0 | $-q^{-2}$ | 0 | q^{-2} | 0 | $-q^{-2}$ | 0 | 0 | 0 | q^{-2} | 0 | q^{-1} | 0 | 0 |
| T_2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | q^{-2} | q^{-1} | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

where * = $-q^{-1} - q^{-2}r^{-1} + r^{-1}$

* $\dim \mathcal{B}_n = |\mathcal{B}_n| = (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1$

6 今後の展望

- Symplectic q -Schur 代数との双対性について

古典的な Schur-Weyl 双対性とは, 体 F 上の一般線型群 $GL_n(F)$ の自然表現を E とするとき, 次の事実が成り立つことを指す.

命題 6. F が無限体であるとき, 次が成立する.

$$\begin{aligned}\Phi(FGL_n(F)) &= \text{End}_{\mathfrak{S}_r}(E^{\otimes k}) =: \mathcal{S}(n, k) \\ \Psi(F\mathfrak{S}_k) &= \text{End}_{GL_n(F)}(E^{\otimes k}) \quad \text{for } k \leq n\end{aligned}$$

ただし, Φ は $GL_n(F)$ の $E^{\otimes k}$ への自然なテンソル積表現, Ψ は \mathfrak{S}_k によるテンソル成分の置換表現とする.
また, $\mathcal{S}(n, k)$ を Schur 代数と呼ぶ.

この事実は, 互いの作用を量子化した A 型の岩堀-Hecke 代数と q -Schur 代数に対しても成り立つことが知られている.

他の古典群として, 一般線型群を斜交群に置き換えて同様に考えた場合, 次の事実が知られている.

命題 7. F が無限体であるとき, 次が成立する.

$$\begin{aligned}\Phi(FSp_{2n}(F)) &= \text{End}_{Br_k(-2n)}(E^{\otimes k}) =: \mathcal{S}p(n, k) \\ \Psi(Br_k(-2n)) &= \text{End}_{Sp_{2n}(F)}(E^{\otimes k}) \quad \text{for } k \leq n\end{aligned}$$

ここで, $Br_k(-2n)$ は Brauer 代数とし, E は $2n$ 次元で非退化な歪対称双線型形式が与えられているとする.
また, $\mathcal{S}p(n, k)$ を Symplectic Schur 代数と呼ぶ.

最近, $Sp(n, r)$ を量子化した代数が S.Oehms により導入された. B-M-W 代数は Brauer 代数の量子化とみなせるので, 双対性の拡張が見つかるかもしれない.

- 他タイプの B-M-W 代数や B-M-W 代数の拡張について
上に述べた A 型以外の場合にも, B 型の B-M-W 代数が R.Haring-Oldenburg により提示されており, 対応する Hecke 代数の表現論との関連や, 代数のトレースとソリッドトーラスにおけるリンク不変量との関係が調べられている.

また最近, 組紐群の線型表現を求める話題と関連して, A.Cohen-D.Gijsbers-D.Wales により D, E 型の B-M-W 代数も発見されており, D 型については最近, D 型 tangle を用いた代数の構成や, cellular 代数となる条件の考察等が, 発見者自身により調べられている.

一方, 岩堀-Hecke 代数を拡張した有木-小池代数と密接に関係する cyclotomic B-M-W 代数が, 最近 S.Yu 等により研究されていて, 特殊な条件下での Markov トレースの存在や, cellular 基底の構成等が調べられている.

また, cyclotomic 型の関係式を削減して得られる affine B-M-W 代数も存在していて, F.Goodman-H.Hauschild 等により, affine tangle を用いた構成や, affine Hecke 代数と類似する基底の存在等が調べられている.

これらの代数に対しても, 対応するタイプの Hecke 代数の表現論を拡張するアプローチが更に応用できるかもしれない.

参考文献

- [1] J. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1) (1989), 249-273.
- [2] J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math. **26** (4) (1987), 745-758.
- [3] J. Enyang, *Cellular bases for the Brauer and Birman-Murakami-Wenzl algebras*, J. Algebra **281** (2004), 413-449.
- [4] J. Enyang, *Specht modules and semisimplicity for Brauer and Birman-Murakami-Wenzl algebras*, J. Alg. Comb. **26** (2007), 291-341.
- [5] S. Fishel and I. Grojnowski, *Canonical bases for the Brauer centralizer algebra*, Math. Res. Lett. **2**(1) (1995), 15-26.
- [6] C. Xi, *On the quasi-heredity of the Birman-Wenzl algebra*, Adv. Math. **154**(2) (2000), 280-298.
- [7] S. Okinaka, *On a relation between canonical bases and Enyang's bases of B - M - W algebras*, 表現論シンポジウム講演集 (2009), 64-73.
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/coe/sympo/psrt/>.
- [8] S. Okinaka, *On a relation between canonical basis and Enyang's basis of B - M - W algebra*, 第6回数学総合若手研究集会テクニカルレポート (2010), 112-115.
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/msyr/2010/>.
- [9] R. Dipper, S. Doty and J. Hu, *Brauer Algebras, Symplectic Schur Algebras and Schur-Weyl Duality*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (1) (2008), 189-213.
- [10] S. Oehms, *Symplectic q -Schur algebras*, J. Algebra **304** (2006), 851-905.
- [11] R. Haring-Oldenburg, *The reduced Birman-Wenzl algebra of Coxeter type B* , J. Algebra **213** (1999), 437-466.
- [12] A. Cohen, D. Gijsbers and D. Wales, *The Birman-Murakami-Wenzl algebras of type D_n* , preprint, math arXiv:0704.2743.
- [13] S. Yu, *The cyclotomic Birman-Murakami-Wenzl algebras*, Ph. D. thesis, University of Sydney, math arXiv:0810.0069.
- [14] F. Goodman and H. Hauschild, *Affine Birman-Wenzl-Murakami algebras and tangles in the solid torus*, Fund. Math. **190** (2006), 77-137.