Derivation のコホモロジーにおける Whitehead 積について

信州大学大学院工学系研究科　内藤貴仁
E-mail：naito@math.shinshu-u.ac.jp

1　序文

X, Y を単連結な CW 複体で有理ホモロジー群が各次数で有限次元なもの, $f : X \to Y$ を基点を保つ連続写像とする．$\mathrm{map}(X, Y; f)$ は基点自由な X から Y への連続写像全体のなす空間 $\mathrm{map}(X, Y)$ の f を含む連結成分とし, $\mathrm{map}_*(X, Y; f)$ は $\mathrm{map}(X, Y; f)$ の中の基点を保つ連続写像全体のなす空間とする．

トポロジーにおいて写像空間は重要な研究対象の一つである．例えば多重ループ空間やファイバー束のセクションの成す空間はよく考えられている写像空間の例である．しかし写像空間自体は無限次元な空間であるため扱うのが困難である．一般に位相空間のホモトピー群を計算することは非常に難しい．例えば球面 S^n といった簡単な空間でさえホモトピー群は全て求まってはいない．しかしホモトピー群に有理数体 $\mathbb{Q}$ をテンソル積したものは写像空間といった扱いづらい空間でも計算できたりする．次は写像空間の有理ホモトピー群についての結果である．

定理 1.1. [1], [2], [4] X が有限次元 CW 複体ならば，$n \geq 2$ に対し次のアーベル群としての同型が存在する：

$$\pi_n(\mathrm{map}(X, Y; f)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^{-n}(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B; \overline{f}))$$
$$\pi_n(\mathrm{map}_*(X, Y; f)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^{-n}(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B_+; \overline{f})).$$

ここで ΛV は Y の極小 Sullivan モデル，B は X のモデル，B_+ は B の augmented イデアル，$\overline{f} : \Lambda V \to B$ は f のモデルとする．極小 Sullivan モデルやモデルについては 2 章で説明することにする．$\mathrm{Der}^n(\Lambda V, B; \overline{f})$ は ΛV から B への $\overline{f}$-derivation 全体である．つまり次数 n の $\mathbb{Q}$ 線形写像 θ で $\theta(ab) = \theta(a)\overline{f}(b) + (-1)^{n|a|}\overline{f}(a)\theta(b)$ をみたすもの全体である．微分 $\mathrm{Der}^n(\Lambda V, B; \overline{f}) \to \mathrm{Der}^{n+1}(\Lambda V, B; \overline{f})$; $\theta \mapsto \theta d - (-1)^n d\theta$ により cochain complex $\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B; \overline{f})$ が定義される．ここで [1] と [4] の同型射と [2] の

同型射は異なっていることに注意する．

一方，ホモトピー群には Whitehead 積と呼ばれる作用素が定義されている．よって定理 1.1 の同型射で Whitehead 積に対応する $H^*\mathrm{Der}(\Lambda V, B; \overline{f})$ の作用素が具体的に記述できないかという自然な疑問が浮かぶが，これについては [2] で考えられている．

この結果を踏まえて私は [1] と [4] の同型射に対応する $H^*\mathrm{Der}(\Lambda V, B; \overline{f})$ の作用素を定義した．はじめに与えられる位相空間 X, Y が $\mathbb{Q}$-局所的な空間の場合 [1] と [4] の同型射 $\pi_n(\mathrm{map}(X, Y; f)) \xrightarrow{\cong} H^{-n}(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B; \overline{f}))$ は X が有限次元であるという仮定を外せる．つまり私の定義した作用素は [2] の条件を弱めたと言えよう．主結果については 3 章で述べる．

本報告集の構成は以下である．2 章で有理ホモトピー論の基本的な定義や性質について述べる．3 章では主結果の証明の概略を与える．最後に 4 章では主結果の応用について述べる．応用としては Whitehead length と呼ばれる位相不変量を評価することを考える．

2　有理ホモトピー論

有理ホモトピー論の詳しい定義や性質については [3] を引用する．まずは有理ホモトピー論で使われる基本的な定義や性質について述べることにする．

定義 2.1. (A, d) が <u>可換な微分代数</u>*(CDGA)* であるとは，$A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上次数付き代数で，$d : A \to A$ は次数 1 の導分で $d^2 = 0$ をみたすもの，さらに積が次数付可換，つまり $ab = (-1)^{|a||b|} ba$ をみたすものである．ここで $|a|$ は a の次数とする．

次数付 $\mathbb{Q}$ 上ベクトル空間 V に対し，次数付可換代数 ΛV を

$$\Lambda V = \mathrm{Tensor}[V^{\mathrm{even}}] \otimes \mathrm{Exterior}[V^{\mathrm{odd}}]$$

と定義する．

X を単連結な CW 複体で有理ホモロジー群が各次数で有限次元なものとする．すると次をみたす CDGA $(\Lambda V, d)$ が存在する．

- 次数付代数として同型 $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H^*(\Lambda V_X)$.
- $d : V \longrightarrow \Lambda^{\geq 2} V$.
- $V = \bigoplus_{i \geq 2} V^i, \quad \dim V^i < \infty \ (^\forall i\ )$.

$(\Lambda V, d)$ のことを X の <u>極小 Sullivan モデル</u> とよび $M(X)$ で表すことにする．また augmented CDGA (B, d) が X のモデルであるとは，疑同型

$M(X) \to (B,d)$ が存在することである．連続写像 $f : X \to Y$ に対し，Y の極小 Sullivan モデル ΛV から X のモデル B への CDGA の射 $\overline{f} : \Lambda V \to B$ が存在する．$\overline{f}$ を f のモデルとよぶ．極小 Sullivan モデルの例をいくつかあげたいと思う．

例 2.2. S^n を n 次元球面とする ($n \geq 2$)．S^n の極小 Sullivan モデル $M(S^n)$ は，n が奇数の時は $(\Lambda(e_n), 0)$, n が偶数の時は $(\Lambda(e_n, e'_{2n-1}), de_n = 0, de_{2n-1} = e_n^2)$ である．ここで $|e_n| = n$, $|e_{2n-1}| = 2n-1$.

例 2.3. $\mathbb{C}P^n$ を n 次元複素射影空間とする．$\mathbb{C}P^n$ の極小 Sullivan モデル $M(\mathbb{C}P^n)$ は $(\Lambda(x_2, y_{2n+1}), dy_{2n+1} = x_2^{n+1})$ である．ここで $|x_2| = 2$, $|y_{2n+1}| = 2n+1$.

この章の最後に重要な性質をあげておく．

定理 2.4. [3, Theorem 15.11] X を単連結な CW 複体で有理ホモロジー群が各次数で有限次元なもの, $(\Lambda V, d)$ を X の極小 Sullivan モデルとする．このとき次の同型を得る：

$$\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V^i, \mathbb{Q}).$$

3 写像空間の Whitehead 積

まず Whitehead 積の定義を思い出す．Z を位相空間とし，$g \in \pi_n(Z)$, $h \in \pi_m(Z)$ とする．このとき g と h の Whitehead 積 $[g,h] \in \pi_{n+m-1}(Z)$ とは次の合成写像のことである：

$$S^{n+m-1} \xrightarrow{\eta} S^n \vee S^m \xrightarrow{(g|h)} Z.$$

ここで η は，接着空間 $(S^n \vee S^m) \cup_\eta e^{n+m}$ が積空間 $S^n \times S^m$ になるものである．

次に主結果を紹介する．

定理 3.1. $n \geq 2$ に対し、[1], [4] の自然な同型写像

$$\pi_n(\mathrm{map}(X,Y;f)) \cong H^{-n}(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B; \overline{f}))$$
$$\pi_n(\mathrm{map}_*(X,Y;f)) \cong H^{-n}(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B_+; \overline{f}))$$

は, 次で定義される次数 1 の作用素

$$[\ ,\ ] : H^*(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B; \overline{f})) \otimes H^*(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B; \overline{f})) \longrightarrow H^*(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B; \overline{f}))$$

$$[\varphi, \psi](v) =$$
$$(-1)^{|\varphi|+|\psi|-1} \sum \Big(\sum_{i \neq j} (-1)^{\varepsilon_{ij}} u_1 \cdots u_{i-1} \varphi(v_i) u_{i+1} \cdots u_{j-1} \psi(v_j) u_{j+1} \cdots u_s \Big)$$

により Whitehead 積を保つ同型射となる．ここで v は V の基底，$dv = \sum v_1 v_2 \cdots v_s$，$u_k = \overline{f}(v_k)$，

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} |\varphi|(\sum_{k=1}^{i-1} |v_k|) + |\psi|(\sum_{k=1}^{j-1} |v_k|) + |\varphi||\psi| & (i < j) \\ |\varphi|(\sum_{k=1}^{i-1} |v_k|) + |\psi|(\sum_{k=1}^{j-1} |v_k|) & (j < i) \end{cases}$$

とする．$H^*(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B_+; \overline{f}))$ には上で定義した制限射で作用素が定義され，上記の同型射は Whitehead 積を保つ．

主結果の証明の概略を説明する．$g' \in \pi_n(\mathrm{map}(X, Y; f))$，$h' \in \pi_m(\mathrm{map}(X, Y; f))$ とし，それらの随伴をそれぞれ $g : S^n \times X \to Y$，$h : S^m \times X \to Y$ とする．この主結果の証明は Whitehead 積 $[g', h']$ の随伴

$$S^{n+m-1} \times X \xrightarrow{\eta \times 1} (S^n \vee S^m) \times X \xrightarrow{(g|h)} Y$$

のモデルをどのようにして作るかが重要である．$S^n \vee S^m$ の極小 Sullivan モデルは [3, p177] より次の形をしていることが分かる．

$$M(S^n \vee S^m) = (M(S^n) \otimes M(S^m) \otimes \Lambda(\iota_{n+m-1}, x_1, x_2, \cdots), d).$$

ここで $d\iota_{n+m-1} = e_n e_m$，$|\iota_{n+m-1}| = n + m - 1 < |x_i|$ ($^\forall i \geq 1$)．η のモデルについて次の事がわかる．

補題 3.2. $\overline{\eta} : M(S^n \vee S^m) \to M(S^{n+m-1})$ を η のモデルとすると，$\overline{\eta}(\iota_{n+m-1}) = (-1)^{n+m-1} e_{n+m-1}$ が成り立つ．

次に $(g|h)$ のモデルについて考える．g と h のモデルを $\overline{g} : M(Y) \to M(S^n) \otimes M(X)$, $\overline{h} : M(Y) \to M(S^m) \otimes M(X)$ とする．このとき次の図式を可換にするリフト ϕ が存在する ([3, Lemma 12.4])．

$$\begin{array}{ccc} & & M(S^n \vee S^m) \otimes M(X) \\ & \overset{\phi}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \pi \otimes 1} \\ M(Y) & \xrightarrow[(\overline{g}, \overline{h})]{} & (M(S^n) \times_{\mathbb{Q}} M(S^m)) \otimes M(X) \end{array}$$

ここで $M(S^n) \times_{\mathbb{Q}} M(S^m)$ は augmentation の引き戻し，$\pi : M(S^n \vee S^m) \to M(S^n) \times_{\mathbb{Q}} M(S^m)$ は自然な全射疑同型である．するとこのリフト ϕ が $(g|h)$ のモデルであることが分かるので，リフト工夫して作ることで主結果が得られる．

主結果の後半の $H^*(\mathrm{Der}^*(\Lambda V, B_+; \overline{f}))$ における作用素が矛盾なく定義できることは次の補題から導かれる．

補題 3.3. 包含写像 $\mathrm{map}_*(X,Y;f) \to \mathrm{map}(X,Y;f)$ から誘導されるホモトピー群の間の写像 $\pi_n(\mathrm{map}_*(X,Y;f)) \to \pi_n(\mathrm{map}(X,Y;f))$ は単射である.

4 応用

応用としては写像空間の Whitehead length と呼ばれる不変量を評価することが出来る．定義は次で与える．

定義 4.1. 位相空間 Z に対し,

$$\mathrm{WL}(Z) = \max\{n \geq 1 \mid [x_1,[x_2,\cdots,[x_{n-1},x_n],\cdots]] \neq 0\ ({}^{\exists}x_i \in \pi_{\geq 2}(Z))\}$$

を Z の <u>*Whitehead length*</u> と呼ぶ.

つまり $\mathrm{WL}(Z)=1$ ということは，全ての Whitehead 積が自明になることを示している．例えば Z が H-空間の場合は $\mathrm{WL}(Z)=1$ となる．まず初めに次の不等式

$$\mathrm{WL}(\mathrm{map}_*(X,Y;f)) \leq \mathrm{WL}(\mathrm{map}(X,Y;f))$$

が成り立つことに注意する．これは補題 3.3 より直ぐにわかる．まず $\mathrm{map}(X,Y;f)$ の Whitehead length を考える．主結果より次の結果を得る．

命題 4.2. *X,Y を単連結な CW 複体で有理ホモロジー群が各次数で有限次元なもの, $f:X\to Y$ を基点を保つ連続写像とする．もし Y が coformal, つまり Y の極小 Sullivan モデル $(\Lambda V,d)$ に対し $d(V)\subset \Lambda^2 V$ ならば,*

$$\mathrm{WL}(\mathrm{map}(X,Y;f)) \leq \mathrm{WL}(Y).$$

次に $\mathrm{map}_*(X,Y;f)$ の Whitehead length を評価したいが，その前に一つ定義を与えておく．

定義 4.3. 次数付代数 $A=\bigoplus_{i\geq 0}A^i$ に対し,

$$\mathrm{nil}A = \max\{n \geq 1 \mid A^+\cdot A^+\cdots A^+ \neq 0\ (n \text{ factors})\}$$

を A の <u>*product length*</u> とよぶ.

pruduct length を用いて次の $\mathrm{map}_*(X,Y;f)$ の Whitehead length の上からの評価を得る．

命題 4.4. X, Y を単連結な CW 複体で有理ホモロジー群が各次数で有限次元なもの, $f : X \to Y$ を基点を保つ連続写像, ΛV を Y の極小 Sullivan モデル, B を X のモデルとする．すると

$$\mathrm{WL}(\mathrm{map}_*(X, Y; f)) \leq \mathrm{nil}B.$$

さらに，$\omega = \min\{n \geq 2 \mid d(V) \subset \Lambda^{\geq n}V\}$ とおくと，$\mathrm{WL}(Y) = 1$, $\mathrm{nil}B \geq 2$ の時

$$\mathrm{WL}(\mathrm{map}_*(X, Y; f)) \leq \frac{1}{\omega - 1}(\mathrm{nil}B - 1) + 1.$$

を得る.

最後に具体的な空間の Whitehead length を求めてみる．$m < n$ とし, $i : \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^n$ を m 次元複素射影空間から n 次元への包含写像とする．$\mathrm{map}(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}}; i_{\mathbb{Q}})$, $\mathrm{map}_*(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}}; i_{\mathbb{Q}})$ の Whitehead length がどうなるかを考える．まずホモトピー群を計算してみると次のようになることが分かる.

例 4.5.
$\pi_k(\mathrm{map}(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}}; i_{\mathbb{Q}}))$

$$= \begin{cases} \mathbb{Q} & (k = 2,\ 2(n-m)+1,\ 2(n-m)+3, \cdots,\ 2n+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\pi_k(\mathrm{map}_*(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}}; i_{\mathbb{Q}}))$

$$= \begin{cases} \mathbb{Q} & (k = 2(n-m)+1,\ 2(n-m)+3, \cdots,\ 2n-1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

実際に計算すると全ての基底を記述することが出来るので、これから簡単な計算で Whitehead length が分かる.

例 4.6.

$$\mathrm{WL}(\mathrm{map}(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}}; i_{\mathbb{Q}})) = \begin{cases} 2 & (n-m = 1) \\ 1 & (n-m > 1) \end{cases}$$

$$\mathrm{WL}(\mathrm{map}_*(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}}; i_{\mathbb{Q}})) = 1$$

今回は包含写像の場合のみを紹介したが, 同様の計算で $\mathrm{map}(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}})$, $\mathrm{map}_*(\mathbb{C}P^m_{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}P^n_{\mathbb{Q}})$ の全ての連結成分の Whitehead length も計算することが可能である.

参考文献

[1] J.Block and A.Lazarev, André-Quillen cohomology and rational homotopy of function spaces, Adv. Math., **193** (2005), 18-39.

[2] U.Buijs and A.Murillo, The rational homotopy Lie algebra of function spaces, Comment. Math. Helv., **83** (2008), 723-739.

[3] Y. Félix, S. Halperin and J. Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Math., 205, Springer, New York, 2001.

[4] G.Lupton and S.Smith, Rationalized evaluation subgroups of a map I : Sullivan models, derivations and G-sequences, Journal of Pure and Applied Algebra, **209** (2007), 159-171.