Bernoulli-type relations in some noncommutative polynomial ring

村田駿祐（筑波大学数理物質科学研究科）

K を標数 0 の体とし，$K[x,y]$ を x,y からなる 2 変数非可換多項式環とする．また $I=\langle xy-yx-x\rangle$ を $xy-yx-x$ から生成される $K[x,y]$ のイデアルとし，$A=K[x,y]/I$，すなわち非可換多項式環 $K[x,y]$ をイデアル I で割った剰余環とする．以後，A における元 $\bar{x}=x+I$，$\bar{y}=y+I$ を（記号を流用して）それぞれ x，y と表記する．このとき，次の事実が成り立つ．

定理 1. (Bernoulli-type relations)
A を上のように定義し，A の元 $w_{k,\ell}$ を

$$w_{k,\ell}=(xy^k-y^kx)x^\ell\in A\quad(k\geq 1,\ell\geq 0)$$

とおく．このとき，次の関係式が成り立つ．

$$xw_{k,\ell}=\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}w_{k,\ell+1}$$

$$yw_{k,\ell}=\frac{k}{k+1}w_{k+1,\ell}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}B_{k+1-i}w_{i,\ell}$$

□

ここで $\binom{k}{i}$ は 2 項係数であり，B_n は $B_1=1/2$ をとるベルヌーイ数である．さて，上で定義した A は実は non-abelian な 2 次元リー代数の包絡代数と同型である．従って，Poincaré-Birkhoff-Witt's theorem より，$A=\oplus_{m,n\geq 0}Kx^my^n$ となり，ここで

$$W=\bigoplus_{m\geq 1,n\geq 0}Kx^my^n$$

とおく．このとき，Bernoulli-type relations などを用いれば次の事実が成り立つことがわかる．

系 2. W は A の両側イデアルである． □

系 3. $w_{k,\ell}$ は W の基底となる．すなわち $W=\oplus_{k\geq 1,\ell\geq 0}Kw_{k,\ell}$ を得る． □

ここで，次のような Bernoulli-type relations の変形したものを考える．

命題 4. A の元 w_k を

$$w_k = xy^k - y^k x \in A \quad (k \geq 1).$$

とおく．このとき次の関係式が成り立つ．

$$yw_k = \frac{k}{k+1} w_{k+1} - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} B_{k+1-i} w_i$$

$$w_k y = \frac{k}{k+1} w_{k+1} - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} B_{k+1-i} w_i$$

□

このとき，係数にベルヌーイ数を含む次の関係式が成り立つ．

命題 5. L を上記のリー代数とする．このとき $U(L)$ において次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
(\mathrm{P}_k) \quad yxy^k &= \frac{k}{k+1}\, xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}\, y^{k+1} x \\
&\quad - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} B_{k+1-i}\, xy^i + \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} B_{k+1-i}\, y^i x \\
(\mathrm{Q}_k) \quad y^k xy &= \frac{1}{k+1}\, xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}\, y^{k+1} x \\
&\quad + \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} B_{k+1-i}\, xy^i \\
&\quad - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} B_{k+1-i}\, y^i x
\end{aligned}$$

□

ベルヌーイ数はある非可換多項式環（を一つの関係式で割った環）のイデアルに生ずる構造定数，及び non-abelian な 2 次元リー代数の包絡代数における関係式の双方に深く関連している．

References

[1] S. Murata, *Bernoulli-type Relations in Some Noncommutative Polynomial Ring*, arXiv:0912.1711