On F-thresholds

松田 一徳*

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

第 15 回代数学若手会では講演の機会をいただきまして，ありがとうございました．オーガナイザーの皆様にあつく御礼申し上げます．

1 F-threshold についての簡単なサーベイ

F-threshold とは何かを一言で答えるならば，正標数の環のイデアルの組に対して定義される不変量，である．ではそれは一体どのような意味を持つ不変量なのかと聞かれると，答えに窮してしまうというのが正直なところである．F-threshold というタイトルで講演しておいてそれはないだろう，というのはもっともな話であるが，F-threshold 自体まだ生まれて間もない (10 年も経っていない) 不変量であるため，まだ良く分かっていないことがたくさんあるのである．発展途上の不変量と言えよう．従って，F-threhold の意味付けに関しては，これから様々なことが明らかにされていくと思われる．私はそれに対して何らかの貢献をしたいという思いで F-threshold を研究している．

まず，F-threshold が定義された背景について述べる．標数 0 の代数多様体の特異点を解析するためのツールとして，log-canonical threshold と呼ばれる不変量がある．この不変量は，標数 $p > 0$ の世界で定義される F-pure threshold(これについては千葉隆宏君の報告書を参照してください) と対応を持つことが，原-吉田，Mustaţă-高木-渡辺により示された．標数 0 の世界と標数 $p > 0$ の世界を結ぶ「辞書」(渡辺敬一氏の言葉を借りた) を作成するための研究が近年活発に行われているが，F-pure threshold と log-canonical threshold との対応はその研究成果の一つである．この F-pure threshold を一般化させたものが F-threshold である．

F-threshold についての現在までの研究としては，正則局所環の場合の F-jumping number との対応や，重複度との関係などがある．また他分野への応用として，Bernstein-佐藤多項式の根を F-threshold を用いて求めることができる ([MTW]) ことが知られている．

さて，背景はこのくらいにして，早速 F-threshold の定義を述べたいと思う．がその前に，記号などの設定を行う．

R は標数 $p > 0$ の可換 Noether 環 (ただし p は素数) とする．R° を R のどの極小素イデアルにも含まれない元の集合とする．R のイデアル J と $q = p^e$ に対し，$J^{[q]} = (x^q \mid x \in J)$ と定める．イデアル J が $\mathfrak{m}$-準素イデアルであるとは，$\sqrt{J} = \mathfrak{m}$ のときをいう．さらに J が巴系イデアルであるとは，J が $\dim R$ 個の元で生成された $\mathfrak{m}$-準素イデアルのときをいう．

以下が F-threshold の定義である．講演では簡単のために環を整域としたが，ここではもう少し一般の環に対して定義する．

定義 1.1. ([HMTW]) R は上記の通りとする．R のイデアル $\mathfrak{a}, J$ を，$\mathfrak{a} \cap R^\circ \neq \emptyset$ かつ $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{J}$ を満たす $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．

極限

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\max\{r \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}^r \not\subseteq J^{[p^e]}\}}{p^e}$$

*d09003p@math.nagoya-u.ac.jp

が存在するとき，この極限値を $\mathfrak{a}$ の J に関する **F-threshold** といい，$c^J(\mathfrak{a})$ と書く．特に $c^J(J)$ を J の **diagonal F-threshold** という．

F-threshold の基本的性質を述べる．まず，$c^J(\mathfrak{a})$ は有限の値をとる ([HMTW, Remark 2.1])．実際，$\mathfrak{a}$ が l 個の元で生成され，かつ $\mathfrak{a} \subseteq J$ とすると，

$$\mathfrak{a}^{N\{l(p^e-1)+1\}} \subseteq (\mathfrak{a}^{[p^e]})^N = (\mathfrak{a}^N)^{[p^e]} \subseteq J^{[p^e]}$$

となることから $c^J(a) \leq Nl$ がわかる．特に，$\dim R = d$ かつ J が巴系イデアルなら，

$$c^J(J) \leq d$$

となる．実際には等号が成り立つことを後で見る．

また，次の命題も基本的である．証明は定義に沿って考えればすぐに分かる．

命題 1.2. ([MTW, Proposition 1.7]) $R, \mathfrak{a}, J$ は定義 2.1 の通りとする．さらに，$\mathfrak{b}, I$ を $\mathfrak{b} \cap R^\circ \neq \emptyset$ かつ $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{I}$ を満たす $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．

(1) $I \supseteq J$ ならば $c^J(\mathfrak{a}) \geq c^I(\mathfrak{a})$ が成り立つ．

(2) $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ ならば $c^J(\mathfrak{b}) \leq c^J(\mathfrak{a})$ が成り立つ．さらに $\mathfrak{a} \subseteq \bar{\mathfrak{b}}$ ならば等号が成り立つ．ここで $\bar{\mathfrak{b}}$ は $\mathfrak{b}$ の整閉包を表す．

(3) 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$c^J(\mathfrak{a}^r) = \frac{1}{r} c^J(\mathfrak{a})$ が成り立つ．

(4) 任意の $q = p^e$ に対し，$c^{J^{[q]}}(\mathfrak{a}) = q \cdot c^J(\mathfrak{a})$ が成り立つ．

次に，F-threshold の簡単な計算例を 2 つ挙げる．

例 1.3. $(R, \mathfrak{m})$ を d 次元 Noether 局所環，$J = (x_1, \ldots, x_d)$ を巴系イデアルとする．このとき $c^J(J)$ の値を計算する．

$(x_1 \cdots x_d)^{p^e-1} \notin J^{[p^e]}$ である (明らかなように思われるかもしれないが，厳密には monomial conjecture というものが必要となる．monimial conjecture については触れないことにする) から $c^J(J) \geq d$ となる．一方基本的性質から $c^J(J) \leq d$ である．従って $c^J(J) = d$ となる．

例 1.4. $R = k[[t^2, t^3]], \mathfrak{m} = (t^2, t^3)$ とする．このとき $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ の値を計算する．

$q = p^e$ とおく．$\mathfrak{m}^{[q]} = (t^{2q}, t^{3q})$ である．

$$\mathfrak{m}^q = (t^{2q}, t^{2q+1}) \not\subseteq (t^{2q}, t^{3q}) = \mathfrak{m}^{[q]}.$$

$$\mathfrak{m}^{q+1} = (t^{2q+2}, t^{2q+3}) \subseteq (t^{2q}, t^{3q}) = \mathfrak{m}^{[q]}.$$

であるから，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = 1$ となる．

実は，$(R, \mathfrak{m})$ が 1 次元の Noether 局所環ならば $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = 1$ となる ([MOY, Corollary 2.4])．

F-threshold に関する基本的な問題を 2 つ挙げて，この節を終わりにする．

(1) $c^J(\mathfrak{a})$ の値はいつ存在する？

例えば，R が F-pure(すなわち，Frobenius 射が pure) のときや，a が単項イデアルのときに存在することが分かっている ([HMTW, Lemmma 2.3]) が，一般には未解決である．また，存在しないような例は今のところ見つかっていない．

(2) $c^J(\mathfrak{a})$ の値は (存在したとき) いつ有理数となるか？

例えば，R が体上本質的に有限型な F-finite(すなわち，Frobenius 射が有限射) 正則環のとき，また R が F-finite 正則環で $\mathfrak{a}$ が単項イデアルのときに正しいことが分かっている ([BMS1], [BMS2]) が，こちらも一般には未解決である．

2 修論の結果

この節では，私の修士論文の主結果を述べる．私は修士論文において，binomial hypersurface と呼ばれる環

$$R = k[[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]]/(X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m} - Y_1^{b_1} \cdots Y_n^{b_n})$$

に対し，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ の値を求めた．

定理 2.1. $R = k[[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]]/(X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m} - Y_1^{b_1} \cdots Y_n^{b_n})$ (ただし $a_i, b_j \in \mathbb{N}$) とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．このとき，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = m + n - 2 + \frac{\max\{\max\{a_i\} + \max\{b_j\} - \min\{\sum a_i, \sum b_j\}, 0\}}{\max\{a_i, b_j\}}$$

となる．特に，次のことが成り立つ：

(1) $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ の値は存在し，有理数である．

(2) $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ の値は標数 p に依らない．

(3) $\dim R - 1 \leq c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) \leq \dim R (= m + n - 1)$ が成り立つ．

証明は長いので, 概略を述べるに留める．証明の鍵となる点は，イデアル $I = (X_1^q, \ldots, X_m^q, Y_1^q, \ldots, Y_n^q, X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m} - Y_1^{b_1} \cdots Y_n^{b_n})$ に含まれる単項式の中で全次数が最小のものを見つけることであるが，イデアル I のグレブナー基底が [Co] において計算されている為，目的のものを見つけることができるのである．

主定理を導くに至った動機を述べる．先ほど申し上げたように，標数 0 の世界と標数 $p > 0$ の世界を結ぶ「辞書」を作成するための研究が近年活発に行われている．自分もそれに貢献したいという思いで F-threshold の意味付けを行おうと研究している．それに当たり，様々な環に対して F-threshold を具体的に計算することにより，そこから意味を見出そうというスタンスを私は採っている．修論では，指導教官である吉田健一先生のアドバイスにより，具体的計算を行う対象として binomial hypersurface を取り上げた．

binomial hypersurface を取り上げた理由は，A.Conca の Hilbert-Kunz 重複度の結果 ([Co]) のアナロジーを与えたいと思ったからである．Hilbert-Kunz 重複度は以下のように定義される不変量である．

定義 2.2. $(R, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，$d = \dim R \geq 1$ とする．さらに，I を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．このとき，

$$e_{\mathrm{HK}}(I) = \lim_{e \to \infty} \frac{l_R(R/I^{[p^e]})}{p^{ed}}$$

を I の **Hilbert-Kunz** 重複度という．特に $e_{\mathrm{HK}}(R) = e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{m})$ と定める．

詳細は省くが，Hilbert-Kunz 重複度は特異点の悪さを繊細に反映する不変量として注目されている．

次に述べる定理は Conca によって与えられた．binomial hypersurface の Hilbert-Kunz 重複度の公式である．

定理 2.3. ([Co, Theorem 3.1]) $R = k[[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]]/(X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m} - Y_1^{b_1} \cdots Y_n^{b_n})$ とし，$u = \max\{\max\{a_i\}, \max\{b_j\}\}$ とする．このとき，

$$e_{\mathrm{HK}}(R) = \sum_{h,k=1}^{m,n} (-1)^{h+k} s_{hm}(a_1, \ldots, a_m) s_{kn}(b_1, \ldots, b_n) \frac{hk}{(h+k-1)u^{h+k-1}}$$

が成り立つ．ただし，s_{hm} は m 変数の h 次基本対称多項式を表す．

(A_n) 型有理二重点 $R = k[[x,y,z]]/(x^{n+1} - yz)$ に対し，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = e_{\mathrm{HK}}(R) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

が成り立っている．この等式は環を binomial hypersurface に拡張させても成り立つのか，という問いを考えた．この問いに答えようと思ったことが主定理を導いた動機である．

主定理と Conca の定理を比較した結果，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ と $e_{\mathrm{HK}}(R)$ との間には一般的な大小関係が成り立たないことが判明した．上で挙げた (A_n) 型有理二重点以外で両者が一致するような例は今のところ発見できていない．両者とも公式が複雑なので十分な考察ができていないのが現状である．両者が一致する例が (A_n) 型有理二重点だけ，ということが分かったならば，それなりに興味深い結果だと個人的には思っている．

3　修論以降の結果

この節では，修論以降の結果 ([MOY]) を述べる．以下は [MOY] の執筆者 3 名による共同研究である．

この結果は F-pure threshold が関わっているので，まずこれの定義を行う．

定義 3.1. ([TW]) R を F-finite な Noether 整域とし，$(0) \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアルとする．さらに $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．

組 $(R, \mathfrak{a}^t)$ が **F-pure** であるとは，任意の十分大きい $q = p^e$ に対し，ある $d \in \mathfrak{a}^{\lfloor t(q-1) \rfloor}$ が存在して，$d^{1/q}R \hookrightarrow R^{1/q}$ が R-準同型として分裂するときをいう．

また, $\mathrm{fpt}(\mathfrak{a}) = \sup\{t \in R_{\geq 0} \mid (R, \mathfrak{a}^t)$ は F-$pure\}$ を $\mathfrak{a}$ の **F-pure threshold** という．

それでは修論以降の結果を述べる．この結果は，渡辺敬一先生 (日本大学) が名古屋大学でされた集中講義の内容が元になっている．講義の中で，渡辺先生は次の例を提示された：

例 3.2. $R = k[[x,y,z,w]]/(xw - yz)$ とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとすると，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = 2$$

が成り立つ．

また，以下の事実は既に知られているものである：

Remark 3.3. R が F-finite 正則局所環なら，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = \dim R$ が成り立つ．

Remark 3.4. R が F-finite な Noether 局所環なら，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) \geq \mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ が成り立つ．

上の例と 2 つの remark を踏まえて，渡辺先生は以下の問いを提示された：

問題 3.5. $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ が成り立つような正則でない Noether 局所環の例が，例 4.2 で挙げたもの以外に存在するか？

この問題を解くにあたり，我々は環が binomial hypersurface の場合を考えることにした．我々は以下のように問題を設定した．

問題 3.6. $R = k[[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]]/(X_1 \cdots X_m - Y_1^{b_1} \cdots Y_n^{b_n})$ とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．このとき，$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ の値はいくつか？

R を上のような形に限定したのは，この場合 R が strongly F-regular と呼ばれるクラスの環になるからである．R が strongly F-regular の場合，$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ の計算が generalized test ideal と呼ばれるイデアルの計算に帰着されるので，計算が幾分簡単になるのである．

それでは，問題 4.6 に解答を与えよう．

定理 3.7. ([MOY, Theorem4.8]) $R = k[[X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n]]/(X_1\cdots X_m - Y_1^{b_1}\cdots Y_n^{b_n})$ とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．このとき，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = m+n-2+\frac{\max\{1+\max\{b_j\}-\min\{m,\sum b_j\},0\}}{\max\{b_j\}},$$

$$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = n+\frac{\max\{m-\sum b_j,0\}}{\max\{b_j\}}$$

となる．

この定理の系として，次が得られる．

系 3.8. $R = k[[X_1,X_2,Y_1,\dots,Y_n]]/(X_1X_2 - Y_1\cdots Y_n) \quad (n\geq 2)$ とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．このとき，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = n$$

が成り立つ．

こうして，我々は環が strongly F-regular binomial hypersurface の場合に，問題 4.5 の解答となる新しい例を作ることができた．

4 今後の課題

最後に私自身が考えている今後の課題を 3 つ挙げて，本報告の終わりとする．

(1) F-threshold を用いて，環またはイデアルを特徴付けることができるか？
例えば，次のような問題を考えていた．

問題 4.1. $(R,\mathfrak{m})$ を正則局所環とし，$d=\dim R\geq 1$ とする．さらに J を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．このとき，

$$c^J(J)=d \text{ ならば}, J \text{ は巴系イデアル}$$

は正しいか？

J が巴系イデアルならば $c^J(J)=d$ となることは例 2.3 で見た．正則局所環ではこの逆も成り立つだろうというのが上の問題の主張である．

最近，渡辺先生のご指摘により，この問題に肯定的な解答が得られた．鍵となるのは次の定理である．

定理 4.2. ([HMTW, Corollary3.2]) $(R,\mathfrak{m})$ を d 次元の excellent analytically irreducible Noether 局所整域とし，$J=(x_1,\dots,x_d)$ を R の巴系イデアルとする．
このとき，R が F-rational であることと，任意の $I \supsetneq J$ に対し $c^I(J) < d$ となることは同値である．

この定理から，J が巴系イデアルでないとすると，$I \subsetneq J$ を満たす巴系イデアル I に対し，

$$c^J(J) < c^I(J) = c^I(I) = d$$

が成り立つ．従って，問題 5.1 が正しいことが分かる．

(2) 行列式環の $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ の値はいくつか？
行列式環の定義を軽く復習しておく．

定義 4.3. X を $m \times n$ 行列とし，$I_{r+1}(X)$ を X の $(r+1)$ 次小行列式全体で生成されるイデアルとする．
このとき，環 $k[X]/I_{r+1}(X)$ を **行列式環** という．

部分的ではあるが，解答を与えることができた．

定理 4.4. (千葉-松田-大溪) X を $m \times n$ 行列とし, $R = k[X]/I_2(X)$ とおく．さらに $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．このとき,

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \max\{m, n\}$$

が成り立つ．

この結果は $r = 1$ の場合である．一般の r に対しては次のように予想している．

予想 4.5. $R = k[X]/I_{r+1}(X)$ のとき,

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \max\{m, n\} \cdot r$$

であろう．

(3) $R = k[[x, y, z]]/(x^a + y^b + z^c) \quad (a \leq b \leq c)$ において，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ の値はいくつか？
この問題を考えるに至った動機は，次の 2 つの remark である．

Remark 4.6. $(R, \mathfrak{m})$ が正則局所環のとき，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \dim R$ が成り立つ．

Remark 4.7. ([MOY, Corollary 2.4]) $(R, \mathfrak{m})$ が 1 次元 Noether 局所環のとき，$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = 1$ が成り立つ．

これらの remark から，次に考える対象は 2 次元以上の正則でない環ということになる．その中でも比較的計算が簡単 (であろう) と思われるので，上記の環を対象とした次第である．
冒頭で述べた，講演で申し上げた誤った内容というのは下記のものである．お詫び申し上げる．本報告書では予想という形で訂正させていただくこととする．

予想 4.8. $R = k[[x, y, z]]/(x^a + y^b + z^c) \quad (a \leq b \leq c)$ とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．このとき，$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{a}$ かつ $p \gg 0$ ならば,

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \frac{3}{2} + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$$

であろう．

参考文献

[BMS1] M. Blickle, M. Mustaţă and K. E. Smith, *F-thresholds of hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[BMS2] M. Blickle, M. Mustaţă and K. E. Smith, *Discreteness and rationality of F-thresholds*, Michigan Math J., **57** (2008), 43–61.

[Co] A. Conca, *Hilbert-Kunz function of monomial ideals and binomial hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **358** (2006), 3717–3731.

[HMTW] C. Huneke, M. Mustaţă, S. Takagi and K.-i. Watanabe, *F-thresholds, tight closure, integral closure, and multiplicity bounds*, Michigan Math.J., **57** (2008), 461–480.

[MOY] K. Matsuda, M. Ohtani and K. Yoshida, *Diagonal F-thresholds on binomial hypersurfaces*, Communications in algebra, to appear.

[MTW] M. Mustaţă, S. Takagi and K.-i. Watanabe, *F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials*, European congress of mathematics, 341-364, Eur.Math.Soc., Zurich, 2005.

[TW] S. Takagi and K.-i. Watanabe, *On F-pure thresholds*, J. Algebra, **282** (2004), 278–297.