実二次体の類数に関する Byeon の結果についての注意

伊東 杏希子 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

本稿は第 15 回代数学若手研究会において講演した内容をまとめたもので ある.

1 Introduction

代数的整数論の重要なキーワードの一つにイデアル類群がある. イデアル類群は代数体ごとに決まる群であり, その位数 (類数という) が有限であることが知られている. 代数体の類数に関する考察テーマは数多くあるが, 本稿では実二次体の類数の非可除性に関する Byeon の結果の一般化について報告する.

1.1 類数の非可除性について

代数体のイデアル類群について次の問題が知られている.

問題 1. 与えられた有限アーベル群 G と自然数 $m \geq 2$ について, G と同型なイデアル類群を持つ m 次代数体は無限に存在するか？

この問題に対し, G が単位群でかつ, $m = 2$ の時 (つまり, 類数が 1 の二次体の時) を考える.

定理 1. (Stark, [St]). 類数が 1 の虚二次体は $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-43})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-67})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ の 9 個のみである.

類数が 1 の実二次体については次の予想が知られている.

予想 1. (Gauss 予想). *類数が 1 の実二次体は無限に存在するだろう.*

Gauss 予想へのアプローチの一つとして次の問題が提起できる.

問題 2. 与えられた素数 l に対して, 類数が l で割れない二次体は無限に存在するか?

この問題に対し, 与えられた素数 l について, 類数が l で割れない実二次体, 虚二次体ともそれぞれ無限に存在することが知られている. 特に $l = 3$ の場合には, 無限に存在することだけでなく正の下極限密度を持つことまで知られている.

1.2　中川-堀江の結果

まず, [DH] から得られる系として次が知られている.

定理 2. (Davenport-Heilbronn).

$$(1)\liminf_{X\to\infty}\frac{\sharp\{0<D<X\mid D\text{ は基本判別式}, 3\nmid h(D)\}}{\sharp\{0<D<X\mid D\text{ は基本判別式}\}}\geq\frac{5}{6},$$

$$(2)\liminf_{X\to\infty}\frac{\sharp\{-X<-D<0\mid D\text{ は基本判別式}, 3\nmid h(-D)\}}{\sharp\{-X<-D<0\mid -D\text{ は基本判別式}\}}\geq\frac{1}{2}.$$

ただし, $0<X\in\mathbb{R}$ とし, $h(D)$ を二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数とする.

この定理に対して, 二次体の判別式に勝手な合同条件を課せられるように改良したのが次の中川-堀江の結果である.

$0<X\in\mathbb{R}$ とし,

$$S_+(X):=\{D\mid 0<D<X, D\text{ は基本判別式}\},$$

$$S_-(X):=\{D\mid -X<D<0, D\text{ は基本判別式}\}$$

とする.

m, N を以下を満たす正の整数とする ;
p を $p\mid gcd(m,N)$ を満たす奇素数とすると, $p^2\mid N$ かつ $p^2\nmid m$ となる. さらに, N が偶数ならば, (i) $4\mid N$, $m\equiv 1 \bmod 4$ または (ii) $16\mid N$, $m\equiv 8,\ 12 \bmod 16$ となる.

この m, N を用いて次の集合を定義する.

$$S_+(X,m,N):=\{D\in S_+(X)\mid D\equiv m \bmod N\},$$

$$S_-(X,m,N):=\{D\in S_-(X)\mid D\equiv m \bmod N\}$$

とする. この時, 次が成り立つ.

定理 3. (中川-堀江, [NH]).

$$(1)\liminf_{X\to\infty}\frac{\sharp\{D\in S_+(X,m,N), 3\nmid h(D)\}}{\sharp S_+(X,m,N)}\geq\frac{5}{6},$$

$$(2)\liminf_{X\to\infty}\frac{\sharp\{D\in S_-(X,m,N), 3\nmid h(D)\}}{\sharp S_-(X,m,N)}\geq\frac{1}{2}.$$

$$(3) \sharp S_+(X,m,N) \sim \sharp S_-(X,m,N) \sim \frac{3X}{\pi^2 \varphi(N)} \prod_{p|N:prime} \frac{q}{p+1}.$$

ただし, $\varphi(N)$ はオイラー関数, $p=2$ ならば $q=4$, $p \neq 2$ ならば $q=p$ とする.

1.3 Byeon の結果

中川-堀江の結果を用いて次が示されている.

定理 4. (Byeon, [By]). t を square-free な整数とする. 二次体の基本判別式 $D>0$ のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{tD})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

1.4 Byeon の結果の背景

$D>0$ を fundamental discriminant, r を実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ のイデアル類群の 3-rank, s を虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ のイデアル類群の 3-rank とする. Scholz により次が示されている.

定理 5. (Scholz, [Sc]).

$$r \leq s \leq r+1.$$

定理 5 に $s=0$ を代入すると $r=0$ となるが, これは $3 \nmid h(-3D)$ ならば $3 \nmid h(D)$ となることを意味している. また定理 3 より, 二次体の基本判別式 $D>0$ のうち $3 \nmid h(-3D)$ となるものは無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことが言える. このことは, 二次体の基本判別式 $D>0$ のうち $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことを意味する. これを二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{D}), \mathbb{Q}(\sqrt{tD}))$ (t は square-free な整数) の場合に拡張したのが定理 3 である.

問題 3. (1) 定理 3 を二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D}))$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ は相異なる整数) の場合に拡張できるか？

(2) さらに, 定理 3 を二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{t_3 D}))$ ($t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$ は相異なる整数) の場合に拡張できるか？

2 主結果

問題3に対する取り組みとして, 次の主結果1を得ることができた. 主結果1はByeonの結果(定理4)の一般化であり, 主結果2は主結果1から出てくるApplicationである.

主結果 1. $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$ を square-free な正の奇数とする (t_1 は 1 も取れるものとする). 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち,
(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D})$ $(t_1 \neq t_2)$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.
(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-t_2 D})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.
(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_3 D})$ $(t_1, t_2, t_3$ は相異なる$)$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

主結果1は次の定理6を示すことにより得ることができる.

定理 6. t_1, t_2, t_3 を square-free な正の奇数とする. m, N を (I), (II) を満たす正の整数でかつ, $gcd(mN, t_1t_2t_3) = 1$ を満たすものとする.

(I) $p \mid gcd(m, N)$ (p は奇素数) ならば, $p^2 \mid N$ かつ $p^2 \nmid m$.
(II) N が偶数ならば, (i) $4 \mid N$, $m \equiv 1 \bmod 4$ または (ii) $16 \mid N$, $m \equiv 8,\ 12 \bmod 16$.

この時,

$$(1) \liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X, m, t_1t_2N) \mid h(t_1D), h(t_2D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp S_+(X, m, t_1t_2N)} \geq \frac{2}{3},$$
$$(2) \liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X, m, t_1t_2N) \mid h(t_1D), h(-t_2D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp S_+(X, m, t_1t_2N)} \geq \frac{1}{3},$$
$$(3) \liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X, m, t_1t_2t_3N) \mid h(t_1D), h(t_2D), h(t_3D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp S_+(X, m, t_1t_2t_3N)} \geq \frac{1}{3}$$

となる.

Remark 1. $(*)$ のうち, $t_i \equiv 1 \bmod 4$ の時は $m \equiv 1 \bmod 4$, $m \equiv 8,\ 12 \bmod 16$ のどの場合にも定理が成立し, $t_i \equiv 3 \bmod 4$ の時は $m \equiv 8 \bmod 16$ の場合のみ定理が成立する.

系 1. t_1, t_2, t_3 を相異なる square-free な正の奇数とする. この時,

$$(1)\ \liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X,m,t_1t_2N) \mid h(t_1D), h(t_2D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp\{0<D<X\}} \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\varphi(t_1t_2N)} \prod_{p\mid t_1t_2N:prime} \frac{q}{p+1},$$

$$(2)\ \liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X,m,t_1t_2N) \mid h(t_1D), h(-t_2D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp\{0<D<X\}} \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varphi(t_1t_2N)} \prod_{p\mid t_1t_2N:prime} \frac{q}{p+1},$$

$$(3)\ \liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X,m,t_1t_2t_3N) \mid h(t_1D), h(t_2D), h(t_3D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp\{0<D<X\}} \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varphi(t_1t_2t_3N)} \prod_{p\mid t_1t_2t_3N:prime} \frac{q}{p+1}.$$

主結果 1 の Application として, 二次体の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大体の岩澤不変量に関する結果を述べる.

定義 1. p を素数, k を有限次代数体, $k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset K$ を $\mathbb{Z}_p$ 拡大, A_n を k_n のイデアル類群の p-part とする. 十分大きな n に対し, A_n の位数は非負整数 λ_p, μ_p と整数 ν_p を用いて

$$\mid A_n \mid = p^{\mu_p p^n + \lambda_p n + \nu_p} \quad (n \gg 0)$$

と書けることが知られていて, この整数 λ_p, μ_p, ν_p を岩澤不変量という.

$\lambda_p = \lambda_p(K/k)$, $\mu_p = \mu_p(K/k)$, $\nu_p = \nu_p(K/k)$ と書く. ここで, $\lambda_p(K/k) = \mu_p(K/k) = \nu_p(K/k) = 0$ の時を考える. $\lambda_p(K/k) = \mu_p(K/k) = \nu_p(K/k) = 0$ の時は, K/k のすべての部分体の類数が p で割れないことを意味している. $\lambda_p(K/k) = \mu_p(K/k) = \nu_p(K/k) = 0$ になるかどうかの判定法として次の定理が知られている.

定理 7. (岩澤, [Iwa]). p を素数, k を有限次代数体, K/k を任意の $\mathbb{Z}_p$-拡大体とする. この時, p が k で不分解で, かつ, k の類数が p で割れなければ, K/k のすべての部分体の類数は p で割れない. つまり, $\lambda_p(K/k) = \mu_p(K/k) = \nu_p(K/k) = 0$ である.

定理 8. (田谷, [Ta1]). $D \equiv 1 \bmod 3$ を正の基本判別式とする. この時,

$$(1)\ \lambda_3(D) = \mu_3(D) = \nu_3(D) = 0,$$

$$(2)\ 3 \nmid h(-3D)$$

は同値である (ただし, $\lambda_3(D), \mu_3(D), \nu_3(D)$ は二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$拡大体の岩澤不変量を表すものとする).

主結果 1 と定理 7 , 8 の結果を合わせることにより主結果 2 を得ることができる.

主結果 2. 与えられた t_1, t_2, t_3 に対して, 以下のように N, m を取ることにより, 二次体の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大体の岩澤不変量がすべて 0 となる二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D}))$, $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{-t_2 D}))$, $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{t_3 D}))$ が無限に存在し, さらに正の密度を持つことが分かる.

<u>**(1)** 実二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D}))$ について</u>

N	m	t_1	t_2	D	N	m	t_1	t_2	D	N	m	t_1	t_2	D
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	–	–	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	16	8	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	–	–	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	16	8	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	–	–	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
–	–	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	48	8	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
16	$8p$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	16	8	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	144	24	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
48	$8p$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	–	–	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	144	24	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

$\bar{0} \equiv 0 \bmod 3$, $\bar{1} \equiv 1 \bmod 3$, $\bar{2} \equiv 2 \bmod 3$ とする. p は $p \equiv 5 \bmod 6$ s.t. $p \nmid t_1 t_2$ を満たす素数とする.

(2) 実二次体, 虚二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{-t_2 D}))$ について

N	m	t_1	$-t_2$	D
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

N	m	t_1	t_2	D
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
16	$8p$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
16	$8p$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

N	m	t_1	t_2	D
16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
16	8	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
48	8	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

p は $p \equiv 5 \bmod 6$ s.t. $p \nmid t_1 t_2$ を満たす素数とする.

(3) 実二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{t_1 D}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{t_2 D}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{t_3 D}))$ について

N	m	t_1	t_2	t_3	D
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
16	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
48	$8p$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

N	m	t_1	t_2	t_3	D
16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
48	8	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$-$	$-$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

N	m	t_1	t_2	t_3	D
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

p は $p \equiv 5 \bmod 6$ s.t. $p \nmid t_1 t_2 t_3$ を満たす素数とする.
各表での素数 p の存在は算術級数定理から分かる.

謝辞： 第 15 回代数学若手研究会を開催, お世話して下さった世話人のみなさまに心より感謝申し上げます.

参考文献

[By] D.Byeon, Class numbers of quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{tD})$, Proc. Amer. Math. Soc. **132**(2004), no. 11, 3137–3140.

[DH] H.Davenport, H.Heilbronn, On the density of discriminants of cubic fields. II, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **322**(1971), no. 1551, 405–420.

[Iwa] K.Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20**(1956), 257–258.

[NH] J.Nakagawa and K. Horie, Elliptic curves with no torsion points, Proc. Amer. Math. Soc. **104**(1988), 20–24.

[Sc] A.Scholz, Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, J. Reine Angew. Math. **166**(1932), 201–203.

[St] H. M. Stark, A complete determination of the complex quadratic fields of class-number one, Michigan Math. J. **14**(1967), 1–27.

[Ta1] H.Taya, Iwasawa invariants and class numbers of quadratic fields for the prime 3, Proc. Amer. Math. Soc. **128**(2000), no. 5, 1285–1292.

[Ta2] H.Taya, 代数体の類数の非可除性について, 第 3 回北陸数論研究集会報告集, 2004, 60–83.