可算表現型の超曲面について

飯間 圭一郎

奈良工業高等専門学校 一般教科

e-mail:iima@libe.nara-k.ac.jp

本稿の内容は, 荒谷督司氏, 高橋亮氏との共同研究に基づく報告である.

本稿を通して, k を標数 0 の代数閉体とし, $R = k[[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d]]/(f)$, ただし f は $0 \neq f \in (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d)$ を充たしているとする. (このような可換局所環は超曲面と呼ばれている.) 有限生成 R 加群のなす圏を $\mathrm{mod}(R)$ と表わし, 極大 Cohen-Macaulay 加群のなす $\mathrm{mod}(R)$ の充満部分圏を $\mathrm{CM}(R)$, 局所的に自由な R 加群 (すなわち, R の極大イデアルの以外の素イデアルで局所化したときに自由加群と同型である) のなす $\mathrm{CM}(R)$ の充満部分圏を $\mathcal{P}(R)$ と表わす. また $\mathrm{CM}(R)$, $\mathcal{P}(R)$ の安定圏を, それぞれ $\underline{\mathrm{CM}}(R)$, $\underline{\mathcal{P}}(R)$ と表わす. ここで, 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群 X で $X \notin \mathcal{P}(R)$ を充たす同型類全体の集合を $\mathcal{M}(R)$ とおき, 各極大 Cohen-Macaulay 加群 M に対して, M の非自由軌跡を $\mathcal{V}(M)$ とする.

R が有限表現型 (すなわち, 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群の同型類が有限個のみ) のとき, R は単純特異点であり ([4, 8]), f は変数変換を施して

$$f = \begin{cases} x_0^2 + x_1^{n+1} + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (A_n)\ (n \geq 1), \\ x_0^2 x_1 + x_1^{n-1} + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (D_n)\ (n \geq 4), \\ x_0^3 + x_1^4 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_6), \\ x_0^3 + x_0 x_1^3 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_7), \\ x_0^3 + x_1^5 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_8), \end{cases}$$

と決定される ([3, 7]). このとき, $\mathrm{CM}(R)$ の対象と射が完全に分類されており, 結果として $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ の AR クィバーが描ける ([1, 10, 11]).

R が可算表現型 (すなわち, 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群の同型類が可算無限個) のとき, f は変数変換を施して

$$f = \begin{cases} x_0^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (A_\infty^d), \\ x_0^2 x_1 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (D_\infty^d), \end{cases}$$

と決定される ([4]). このとき, CM(R) の対象は完全に分類されている ([4, 5]). CM(R) の射については R が孤立特異点を持たないため完全には分類できないけれども, $\mathcal{P}(R)$ の射は完全に分類されており, 結果として $\underline{\mathcal{P}}(R)$ の AR クィバーが描ける ([10]).

しかし, これだけでは可算表現型の超曲面を完全に理解したことにはならないと感じたため, 我々はさらに精密な解析を進めた結果, 次の定理を得た.

定理 1 *R を k 上の可算表現型の超曲面とし, R のイデアルを $\mathfrak{p}_R = (x_0, x_2, \ldots, x_d)$, $\mathfrak{m}_R = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d)$ とおくとき, 次が成り立つ.*

(1) 直既約な極大 *Cohen-Macaulay* 加群 X_R が存在し, 次の 2 条件

(a) $\mathcal{M}(R) = \{X_R, \Omega(X_R)\}$,

(b) $\mathcal{V}(X_R) = \{\mathfrak{p}_R, \mathfrak{m}_R\} = \mathcal{V}(\Omega(X_R))$,

を充たす. ただし, $\Omega(X_R)$ は X_R のシジジーを表わす.

(2) 各 $M \in \mathcal{P}(R)$ について, 完全系列

$$0 \to L \to M \oplus R^n \to N \to 0$$

が存在し, $L, N \in \mathcal{M}(R)$ と $n \geq 0$ を充たす.

定理 1 のひとつの応用として, 次の結果が得られる.

系 2 *定理 1 と同じ記号の下で, 次が成り立つ.*

(1) $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ の三角圏としての次元は 1 である.

(2) CM(R) の *Grothendieck* 群は, $[R]$ と $[X_R]$ により生成される.

以下では, 定理 1 の証明の概略を述べたい.

(証明の概略) (i) (A^1_∞) 型すなわち $R = k[[x_0, x_1]]/(x_0^2)$ のとき, R の素イデアルは $\mathfrak{p} = (x_0)$ と $\mathfrak{m} = (x_0, x_1)$ だけであり, 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群の同型類は,

$$R, R/(x_0), \mathrm{Coker}(\varphi_n)\ (n = 1, 2, \ldots),$$

ただし $\varphi_n = \begin{pmatrix} x_0 & x_1^n \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix}$ である. 完全列

$$0 \to R/(x_0) \to R \to R/(x_0) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0) \to \mathrm{Coker}(\varphi_n) \to R/(x_0) \to 0$$

が得られ, $\mathcal{V}(R/(x_0)) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$ により, $R/(x_0) \in \mathcal{M}(R)$ が成り立つ.

$R_\mathfrak{p}$ 成分の行列の基本変形

$$\begin{pmatrix} -\frac{x_0}{x_1^n} & -1 \\ \frac{1}{x_1^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1^n \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_0}{x_1^n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により，$\mathrm{Coker}(\varphi_n)_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ と同型になる． すなわち，$\mathrm{Coker}(\varphi_n) \notin \mathcal{M}(R)$ であるから，$\mathcal{M}(R) = \{R/(x_0)\}$ が成り立つ.

(ii) (D_∞^1) 型すなわち $R = k[[x_0, x_1]]/(x_0^2 x_1)$ のとき, R の素イデアルは $\mathfrak{p} = (x_0)$, $\mathfrak{q} = (x_1)$ と $\mathfrak{m} = (x_0, x_1)$ だけであり, 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群の同型類は,

$$R, R/(x_0), R/(x_0x_1), R/(x_0^2), R/(x_1),$$

$$\mathrm{Coker}(\varphi_n^+), \mathrm{Coker}(\varphi_n^-), \mathrm{Coker}(\psi_n^+), \mathrm{Coker}(\psi_n^-)\ (n = 1, 2, \ldots),$$

$\varphi_n^+ = \begin{pmatrix} x_0 & x_1^n \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix}$, $\varphi_n^- = \begin{pmatrix} x_0x_1 & x_1^{n+1} \\ 0 & -x_0x_1 \end{pmatrix}$, $\psi_n^+ = \begin{pmatrix} x_0x_1 & x_1^n \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix}$, $\psi_n^- = \begin{pmatrix} x_0 & x_1^n \\ 0 & -x_0x_1 \end{pmatrix}$

である． $R/(x_0x_1)$ は $R/(x_0)$ のシジジーであり，下側の 4 つのタイプの加群が $R/(x_0)$ と $R/(x_0x_1)$ の拡大として表わせることは明らかである. また, R 成分の行列の基本変形

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x_0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0x_1 & x_1 \\ 0 & -x_0x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から, 完全列

$$0 \to R/(x_0x_1) \to R \to R/(x_0) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0) \to R/(x_0^2) \to R/(x_0) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0x_1) \to R/(x_1) \oplus R \to R/(x_0x_1) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0) \to \mathrm{Coker}(\varphi_n^+) \to R/(x_0) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0x_1) \to \mathrm{Coker}(\varphi_n^-) \to R/(x_0x_1) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0x_1) \to \mathrm{Coker}(\psi_n^+) \to R/(x_0) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0) \to \mathrm{Coker}(\psi_n^-) \to R/(x_0x_1) \to 0$$

が得られる． $\mathcal{V}(R/(x_0)) = \mathcal{V}(R/(x_0x_1)) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$, $\mathcal{V}(R/(x_0^2)) = \mathcal{V}(R/(x_1)) = \{\mathfrak{m}\}$ が成り立ち, $R_\mathfrak{q}$ は体なので, $R_\mathfrak{p}$ 加群についてのみ考えれば良い.

$R_{\mathfrak{p}}$ 成分の行列の基本変形

$$\begin{pmatrix} \frac{x_0}{x_1^n} & 1 \\ \frac{1}{x_1^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1^n \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_0}{x_1^n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_0}{x_1^n} & 1 \\ \frac{1}{x_1^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0x_1 & x_1^n \\ 0 & -x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_0x_1}{x_1^n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により, $\mathrm{Coker}(\varphi_n^+)_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Coker}(\varphi_n^-)_{\mathfrak{p}}$, $\mathrm{Coker}(\psi_n^+)_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Coker}(\psi_n^-)_{\mathfrak{p}}$ が得られるので, $\mathcal{M}(R) = \{R/(x_0), R/(x_0x_1)\}$ が成り立つ.

(iii) (A_∞^2) 型すなわち $R = k[[x_0,x_1,x_2]]/(x_0^2+x_2^2) \cong k[[x_0,x_1,x_2]]/(x_0x_2)$ のとき, 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群の同型類は,

$$R, R/(x_0), R/(x_2), \mathrm{Coker}(\varphi_n^+), \mathrm{Coker}(\varphi_n^-)\ (n=1,2,\ldots),$$

ただし $\varphi_n^+ = \begin{pmatrix} x_0 & x_1^n \\ 0 & x_0 \end{pmatrix}, \varphi_n^- = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1^n \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ である. 完全列

$$0 \to R/(x_2) \to R \to R/(x_0) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_2) \to \mathrm{Coker}(\varphi_n^+) \to R/(x_0) \to 0,$$

$$0 \to R/(x_0) \to \mathrm{Coker}(\varphi_n^-) \to R/(x_2) \to 0$$

と, $\mathcal{V}(R/(x_0)) = \mathcal{V}(R/(x_2)) = \{(x_0,x_2), (x_0,x_1,x_2)\}$ は簡単に確かめられる. また, (D_∞^1) 型のときと同様の議論により, $\mathrm{Coker}(\varphi_n^+)_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Coker}(\varphi_n^-)_{\mathfrak{p}}$ が得られるので, $\mathcal{M}(R) = \{R/(x_0), R/(x_2)\}$ が成り立つ.

(iv) (D_∞^2) 型すなわち $R = k[[x_0,x_1,x_2]]/(x_0^2x_1+x_2^2) \cong k[[x_0,x_1,x_2]]/(x_0^2x_1-x_2^2)$ のとき, 直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群の同型類は,

$$R, \mathrm{Coker}(\alpha), \mathrm{Coker}(\beta), \mathrm{Coker}(\varphi_n), \mathrm{Coker}(\psi_n)\ (n=1,2,\ldots),$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_2 & x_0x_1 \\ x_0 & x_2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} x_2 & x_0x_1 & 0 & -x_1^{n+1} \\ x_0 & x_2 & x_1^n & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & x_0x_1 \\ 0 & 0 & x_0 & x_2 \end{pmatrix}, \psi_n = \begin{pmatrix} x_2 & x_0x_1 & -x_1^n & 0 \\ x_0 & x_2 & 0 & x_1^n \\ 0 & 0 & x_2 & x_0x_1 \\ 0 & 0 & x_0 & x_2 \end{pmatrix}$$

であり, $R, \mathrm{Coker}(\beta), \mathrm{Coker}(\varphi_n), \mathrm{Coker}(\psi_n) \in \mathcal{P}(R)$ と $\Omega(\mathrm{Coker}(\alpha)) \cong \mathrm{Coker}(\alpha)$ が知られているので, $\mathcal{M}(R) = \{\mathrm{Coker}(\alpha)\}$ が成り立つ.

自然な複体

$$R^2 \xrightarrow{\alpha} R^2 \xrightarrow{(x_0,-x_2)} R \longrightarrow R/(x_0,x_2) \longrightarrow 0$$

は完全列なので, $\mathrm{Coker}(\alpha)$ は R の素イデアル $\mathfrak{p} := (x_0, x_2)$ と同型である. 極大イデアルを $\mathfrak{m} = (x_0, x_1, x_2)$ とおくと, $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \subset \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$ と $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ が成り立つので, $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$ が得られる.

$\mathrm{Coker}(\varphi_n)$ と $\mathrm{Coker}(\psi_n)$ が $\mathrm{Coker}(\alpha)$ の拡大で表わされることは明らかであり, R 成分の行列の基本変形

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & -x_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & x_0x_1 & 0 & -x_1 \\ x_0 & x_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & x_0x_1 \\ 0 & 0 & x_0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_0 & 0 & -x_2 & 1 \\ 0 & 1 & x_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から, 完全列

$$0 \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\varphi) \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\psi) \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \oplus R \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to R^2 \to \mathrm{Coker}(\alpha) \to 0$$

が得られる. □

$d \geq 3$ の場合を証明する前に Knörrer の巡回性と呼ばれる次の補助定理を思い出そう.

補助定理 3 $S = k[[x_0, x_1, \ldots, x_n]]$ と $T = k[[x_0, x_1, \ldots, x_n, y, z]]$ を形式的冪級数環とし, $f \in (x_0, x_1, \ldots, x_n)S$ を 0 でない元とするとき, f の行列分解のなす圏から $f + yz$ の行列分解のなす圏への関手

$$(A, B) \mapsto \left(\begin{pmatrix} A & yE \\ zE & -B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & yE \\ zE & -A \end{pmatrix} \right)$$

は, 三角圏の間の三角同値

$$F : \underline{\mathrm{CM}}(S/(f)) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathrm{CM}}(T/(f+yz))$$

を導く.

以降は定理 1 の証明の概略に戻る.

(v) $d \geq 3$ の場合は超曲面 R に対して, (A_∞^1) 型, (D_∞^1) 型, (A_∞^2) 型または (D_∞^2) 型の超曲面 T が一意的に定まり, Knörrer の巡回性の関手を合成することで三角同値

$$F : \underline{\mathrm{CM}}(T) \longrightarrow \underline{\mathrm{CM}}(R)$$

が得られる. このとき, $X_R = FX_T$ は定理 1 の (1) と (2) を充たす. □

参考文献

[1] T. Araya. Stable categories and derived categories. *The proceedings of the* 30*th Symposium on Commutative Ring Theory*, 127–134, 2009.

[2] T. Araya.; K. Iima.; R. Takahashi. On the structure of Cohen-Macaulay modules over hypersurfaces of countable Cohen-Macaulay representation type. *arXiv: 1002.0137v1 [math.RT] 31 Jan 2010.*

[3] V.I. Arnold. Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weylgroups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. *Funct. Anal.* **6** (1972), 254–272.

[4] R.-O. Buchweitz.; G.-M. Greuel.; F.-O. Schreyer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities II. *Invent. math.* **88** (1987), 165–182.

[5] I. Burban.; Y. Drozd. Maximal Cohen-Macaulay modules over surface singularities. *Trends in Representations of Algebras and Related Topics*. EMS Publishing House, 101–166, 2008.

[6] G.-M. Greuel.; H. Kröning. Simple Singularities in Positive Characteristic. *Math. Z.* **203** (1990), 339–354.

[7] K. Kiyek.; G. Steinke. Einfache Kurvensingularitäten in beliebiger Charakteristik. *Arch. Math.* **45** (1985), 565–573.

[8] H. Knörrer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I. *Invent. math.* **88** (1987), 153–164.

[9] R. Rouquier. Dimensions of triangulated categories. *J. K-Theory* **1** (2008), 193–256.

[10] F.-O. Schreyer. Finite and countable CM-representation type, Singularities, representation of algebras, and vector bundles. *Springer Lecture Notes in Math.* **1273** (1987), 9–34.

[11] Y. Yoshino. *Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings.* London mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.