Buchsbaum 環内の擬ソークルイデアルの挙動について

堀内淳（明治大学大学院理工学研究科）

1　はじめに

第 15 回代数学若手研究会において発表した内容と, その研究背景を概説したい. 本研究の内容は明治大学の後藤四郎教授と櫻井秀人氏との共同研究基づくものである. 本報告の目的は，Buchsbaum 局所環内の擬ソークルイデアルの挙動を解析し，その Hilbert 函数や随伴次数環の構造を決定することにある. 研究の背景や主結果を述べるために，まずいくつかの記号と定義を導入しよう.

以下，A は極大イデアルを $\mathfrak{m}$ を持つ Noetherian 局所環とする.$d = \dim A > 0$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限と仮定する.$Q = (a_1, \cdots, a_d)$ を A の巴系イデアルとしよう. このとき，Q に関する擬ソークルイデアルは，次のように定義される.

定義 1.1. $q \geq 1$ を整数とするとき，

$$I = Q :_A \mathfrak{m}^q$$

という形のイデアルを，Q に関する擬ソークルイデアルと呼ぶ.

イデアル I に対し,

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n, \mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}, \mathrm{F}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$$

とおき，それぞれイデアル I の Rees 環, 随伴次数環, ファイバー環と呼ぶ.$\mathrm{e}_I^i(A)$ によってイデアル I の第 i-Hilbert 係数を表すことにする. 従って，I の Hilbert 函数は, 整数 n が十分大なるとき，次のように記述される：$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d\mathrm{e}_I^d(A)$.
ただし，$\ell_A(M)$ は，A 加群 M の長さを表す.

A の元 $f \neq 0$ に対して, $f \in \mathfrak{m}^n$ なる最大の整数 n を f の位数といい，$\mathrm{o}_\mathfrak{m}(f) = n$ で表す.

定義 1.2. $0 \neq f \in A,\ \mathrm{o}_\mathfrak{m}(f) = n$ とする. $f^* \equiv f \pmod{\mathfrak{m}^{n+1}} \in \mathrm{G}(\mathfrak{m})$ とおき, これを f の初項形式という.

以下，本報告で必要となるいくつかの環のクラスの定義をまとめる.

定義 1.3. 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ は，任意の $i \neq d$ について

$$\ell_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A)) < \infty$$

なるとき, *generalized Cohen-Macaulay* 環, または *FLC* 環という.

$$A \text{ が } FLC \text{ 環である} \iff \sup_\mathfrak{q}\{\ell_A(A/\mathfrak{q}) - \mathrm{e}_\mathfrak{q}^0(A)\} < \infty$$

が成り立つ. 但し，右辺の上限において，$\mathfrak{q}$ は環 A の全ての巴系イデアルを走るものとする.

また，差 $\ell_A(A/\mathfrak{q}) - \mathrm{e}_\mathfrak{q}^0(A)$ が巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の取り方に拠らず，共通の一定値をとるとき，環 A は *Buchsbaum* であるという. 従って，*Buchsbaum* 環は *FLC* 環の特殊なものである.

次に, FLC 環の議論で重要な役割を果たすイデアルを導入しよう.

定義 1.4. *FLC* 環 A の巴系イデアル Q は，等式

$$\ell_A(A/Q) - \mathrm{e}_Q^0(A) = \sup_{\mathfrak{q}}\{\ell_A(A/\mathfrak{q}) - \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}^0(A)\}$$

が成り立つとき，*standard* であるという. また，環 A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル J は，J に含まれる全ての巴系イデアルが *standard* であるとき，*standard* であるという.

ここで, 我々の研究の背景と動機を説明しよう. 我々の研究の契機は A. Corso, C. Polini, C. Huneke, W. V. Vasconcelos, 後藤たちによる Cohen-Macaulay 環におけるソークルイデアル $Q:\mathfrak{m}$ の研究にまで遡る. この研究は巴系イデアルの整閉性に関する美しい定理として次のように結実している.

定理 1.5 ([CHV, CP1, CP2, CPV, G1]). A を *Cohen-Macaulay* 局所環，Q は環 A の巴系イデアル，$I = Q:\mathfrak{m}$ はソークルイデアルとする. このとき，次の条件は同値である.

(1) $I^2 \neq QI$.

(2) Q は A 内で整閉である.

(3) A は正則局所環で, A-加群 $\mathfrak{m}/Q$ は *cyclic* である.

従って, A が正則局所環ではない *Cohen-Macaulay* 局所環なら，全ての巴系イデアル Q に対し，等式 $I^2 = QI$ が成立する. ゆえに，I に付随する随伴次数環 $\mathrm{G}(I)$ とファイバー環 $\mathrm{F}(I)$ はどちらも *Cohen-Macaulay* 環である. 更に基礎環 A の次元が 2 以上なら，*Rees* 代数 $\mathcal{R}(I)$ もまた *Cohen-Macaulay* 環となる.

この結果を踏まえて，局所環内の擬ソークルイデアル $I = Q:\mathfrak{m}^q$ の研究は，その後，次の 2 つの方向に発展した. 第 1 の方向は基礎環 A に関する仮定を弱めることである. この研究は，後藤–櫻井により実施された（[GSa1, GSa2, GSa3]）. 彼らは主に Buchsbaum 局所環 A 内のソークルイデアル $I = Q:\mathfrak{m}$ の挙動を解析し，極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する重複度が $\mathrm{e}_{\mathfrak{m}}^0(A) \geq 2$ であり，かつ巴系イデアル Q が $\mathfrak{m}$ の十分高い冪に含まれているときは, 等式 $I^2 = QI$ が成立し, 従って I に関する随伴次数環 $\mathrm{G}(I)$ も Buchsbaum 環であることを示している.

第 2 は，H.-J. Wang [Wan], 後藤, 松岡, 高橋, 木村, H. L. Truong, T. T. Phuong ([GMT, GKM, GKMP, GKTP]) らにより実行された方向である. [GMT] では, 基礎環 A は $\dim A > 0$ であって $\mathrm{e}_{\mathfrak{m}}^0(A) \geq 3$ なる Gorenstein 局所環であると仮定して, 擬ソークルイデアル $Q:\mathfrak{m}^2$ が解析された. [GKM, GKMP, GKTP] においては，特殊な 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環の場合に，擬ソークルイデアル $Q:\mathfrak{m}^q$ $(q \geq 1)$ の振舞いが詳細に研究されている. しかしながら, 基礎環の次元を $\dim A \geq 2$ とするならば, 以下に挙げる Wang [Wan] の結果及びその手法こそは，極めて創造的かつ独創的な発展であると言えるかもしれない. この結果は C. Polini and B. Ulrich [PU] らによる予想に対し，肯定的な解答を与えたものである.

定理 1.6 ([Wan]). A は *Cohen-Macaulay* 局所環とし, $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ とする.$q \geq 1$ は整数とする.Q は A の巴系イデアルとし, $Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+1}$ とする. ここで $I = Q:\mathfrak{m}^q$ とすると, 次が正しい.

$$\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q, \qquad I \subseteq \mathfrak{m}^{q+1}, \qquad I^2 = QI.$$

従って, I の随伴次数環 G(I), ファイバー環 F(I), *Rees* 代数 $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ は全て *Cohen-Macaulay* 環である.

我々の研究の動機は, 上の Wang の定理において「Cohen-Macaulay の仮定を外して，定理が成立するか否か」という問いかけにある. 次節で述べるように，本報告の主定理 2.1 は，基礎環は Buchsbaum 環であると仮定し, 巴系イデアルの取り方を調整しかつ巴系に僅かな条件を付加することによって，Wang の定理が Buchsbaum 環上で成立することを示したものである. 同時に，擬ソークルイデアル $I = Q:\mathfrak{m}^q$ に付随する随伴次数環 $\mathrm{G}(I)$ の環構造の詳細な記述も得られている.

ここで, 本報告の構成について簡単に触れておく. 本報告は 5 節から成る. 第 2 節では主結果を述べ，その意味の概説を行う. 定理 2.1 の証明は第 3 節で行う. 我々の証明は，$\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q$ を示す部分と $I^2 = QI$ を示す二つの部分に分割され

る. 我々の基礎環 A は Cohen-Macaulay 局所環ではないため，$\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q$ から $I^2 = QI$ が直接導かれるわけではないからである.

定理 2.1 では，極大イデアル $\mathfrak{m}$ の随伴次数環 $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ について，$\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ が仮定されている. 第 4 節では，$\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ が Buchsbaum 環であってかつ $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) = 1$ の場合には，如何なる結果が得られるかを考察する. 第 5 節では，主結果で設定した仮定を満たす環の具体例を挙げておく.

2 主定理

さて，若手会において紹介した主定理を述べる.

定理 2.1. *A は Buchsbaum 局所環とし, $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ と仮定する.$q \geq 2$ は整数とする.$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は A の巴系イデアルとし, $Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}$ と仮定する. 更に, $a_d = ab$, $(a \in \mathfrak{m}^q,\ \ b \in \mathfrak{m})$ と仮定しよう. このとき，$I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおくと, 次が正しい.*

(1) $\quad \mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q, \qquad I \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}, \qquad I^2 = QI.$

(2) *I の第 1 Hilbert 係数は次のように記述される.*
$\mathrm{e}_I^1(A) = \mathrm{e}_I^0(A) + \mathrm{e}_Q^1(A) - \ell_A(A/I).$

(3) *I の Hilbert 函数は，全ての非負整数 n について，次の等式で与えられる.*
$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \sum_{i=2}^{d}(-1)^i \left[\mathrm{e}_Q^{i-1}(A) + \mathrm{e}_Q^i(A)\right]\binom{n+d-i}{d-i}.$

(4) *I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ は Buchsbaum 環である.$i < d$ なら，A-加群の同型*

$$\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I)) = [\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_{1-i} \cong \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A)$$

を得る. また,

$$\max\left\{n \in \mathbb{Z} \ \mid\ [\mathrm{H}_M^d(\mathrm{G}(I))]_n \neq (0)\right\} \leq 1 - d$$

である.

ここで，$M = \mathfrak{m}\mathrm{G}(I) + \mathrm{G}(I)_+$ は $\mathrm{G}(I)$ の次数付き極大イデアルであり，$[\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_n$ $(i, n \in \mathbb{Z})$ は，$\mathrm{G}(I)$ の M に関する第 i-次局所コホモロジー $\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))$ の n 次斉次成分を表す.

いくつかの補足説明を行っておこう. この定理において，我々の主たる寄与は，主張（1）にある. 実際，主張（1）がひとたび示されるとき，$I^2 = QI$ であって I はイデアル $Q : \mathfrak{m}$ を含むので, 主張 (2) と (3) は後藤–大関 [GO, Section 2] から直ちに従う. 同様に，主張 (4) は後藤–西田 [GN, Section 5] から従う.

以下本報告では，主張 (1) を示すことに集中する.

3 主定理の証明の概説

極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する随伴次数環 $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ の深さが正なら，次のイデアル操作が可能である.

補題 3.1. $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 1$ とする. このとき，次が正しい.

$$\mathfrak{m}^\alpha : \mathfrak{m}^\beta = \mathfrak{m}^{\alpha-\beta} \ \text{ for } \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \ \text{ such that } \ \beta \geq 0.$$

Proof. $\mathfrak{m}^\alpha : \mathfrak{m}^\beta \subseteq \mathfrak{m}^{\alpha-\beta}$ を示せば良い. $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ で, その初項形式 a^* が $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ の正則元となるものを取る. $\mathfrak{m}^\alpha : \mathfrak{m}^\beta$ から元 x を取り, $x \notin \mathfrak{m}^{\alpha-\beta}$ と仮定しよう. すると, $\mathrm{o}_{\mathfrak{m}}(x) \leq \alpha - \beta - 1$ かつ $a^\beta x \in \mathfrak{m}^\alpha$ が得られるが, これは $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ 内で ${a^*}^\beta x^* = 0$ が成り立つことを意味する. これは a^* の取り方に矛盾する. □

我々の主定理は，FLC 環に関する二つの命題に帰着される. 次に示す第 1 の命題とその証明は，[Wan] に根ざしている.

命題 3.2. *A は FLC 環とし，$\operatorname{depth} G(\mathfrak{m}) \geq 2$ と仮定する.$q \geq 2$ は整数とし, 整数 $\ell \geq 0$ をイデアル $\mathfrak{m}^\ell$ が standard となるように取る. $Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は環 A の巴系イデアルであって，$Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+\ell+1}$ なるものとする.$I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおく. このとき，次が正しい.*

$$\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q\ , \qquad I \subseteq \mathfrak{m}^{q+\ell+1}\ , \qquad I^2 \subseteq Q.$$

Proof. $\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q$ が正しいなら，補題 3.1 から,

$$I \subseteq \mathfrak{m}^q \cdot Q : \mathfrak{m}^q \subseteq \mathfrak{m}^{2q+\ell+1} : \mathfrak{m}^q = \mathfrak{m}^{q+\ell+1} \subseteq \mathfrak{m}^q$$

となり, 擬ソークルイデアルの定義から， $I^2 \subseteq Q$ を得る. 従って, $\mathfrak{m}^q I \subseteq \mathfrak{m}^q Q$ を示せば十分である.

剰余体が無限体でかつ $\operatorname{depth} G(\mathfrak{m}) \geq 2$ であるので，イデアル $\mathfrak{m}^q$ の生成系を次のよう選ぶことができる：
$F = \Big\{ f_1 \ldots f_q \mid$ 各 i について $f_i \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$であり, $1 \leq i < j \leq q$ ならば f_i^*, f_j^*は $G(\mathfrak{m})$ 内で正則列をなす $\}$.
さてここで，$\alpha \in I$ と $f = \prod_{i=1}^q f_i \in F$ を取る. このとき, αf は

$$\alpha f = \sum_{i=1}^d a_i x_i, \quad x_i \in A \ \ (1 \leq i \leq d)$$

と表すことができる. 主張　を示すには，$x_i \in \mathfrak{m}^q$ $(1 \leq \forall i \leq d)$ を示せば十分である.

ここで新たに元 $g \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ を，すべての $1 \leq j \leq q$ について初項形式 g^*，f_j^* が $G(\mathfrak{m})$ 内で正則列をなすように取る. 整数 $1 \leq j \leq q$ を 1 つ固定し, $g_j = \prod_{1 \leq k \leq q,\ k \neq j} f_k$ とおく. すると,

$$\alpha(g_j g) = \sum_{i=1}^d a_i x_{ij} \quad (x_{ij} \in A, 1 \leq \forall i \leq d)$$

を得る.$f = f_j g_j$ に注意し, 前式と連立すると, 等式

$$\sum_{i=1}^d a_i (f_j x_{ij}) = \sum_{i=1}^d a_i (g x_i),$$

を得る. 整数 $1 \leq i \leq d$ を 1 つ固定しよう. すると,

$$g x_i - f_j x_{ij} \in (a_1, \cdots, \check{a}_i, \ \cdots a_d) : a_i \quad \text{(A)}$$

が得られるが，我々の環は FLC 環で, $\mathfrak{m}^\ell$ は standard であったので,

$$(a_1, \cdots, \check{a}_i, \cdots a_d) : a_i = (a_1, \cdots, \check{a}_i, \cdots a_d) : \mathfrak{m}^\ell$$

となる. 一方, 補題 3.1 から $(a_1, \cdots, \check{a}_i, \cdots a_d) : \mathfrak{m}^\ell \subseteq Q : \mathfrak{m}^\ell \subseteq \mathfrak{m}^{q+\ell+1} : \mathfrak{m}^\ell = \mathfrak{m}^{q+1}$ であるので,

$$g x_i - f_j x_{ij} \in \mathfrak{m}^{q+1}$$

が得られる.g^*, f_j^* は $G(\mathfrak{m})$ 内で正則列を成していたので,

$$g x_i - f_j x_{ij} \in (g, f_j) \cap \mathfrak{m}^{q+1} = (g, f_j) \cdot \mathfrak{m}^q$$

([VV]) となる. そこで，元 $x_i', x_{ij}' \in \mathfrak{m}^q$ を選んで，$g x_i - f_j x_{ij} = g x_i' - f_j x_{ij}'$ と表せば，g, f_j は A-正則列なので,

$$x_i - x_i' \in (f_j) : g = (f_j)$$

となり，従って,

$$x_i \in \bigcap_{j=1}^q [\mathfrak{m}^q + (f_j)]$$

となる.

ここで，次の主張を必要とする.

Claim 1. 任意の $1 \leq k \leq q$ に対して,

$$\bigcap_{j=1}^{k} [\mathfrak{m}^q + (f_j)] \subseteq \mathfrak{m}^q + (\prod_{j=1}^{k} f_j)$$

である.

Proof. k についての帰納法で示す.$k > 1$ であって，$k-1$ まで主張は正しいと仮定する. ゆえに,

$$\begin{aligned}\bigcap_{j=1}^{k} [\mathfrak{m}^q + (f_j)] &\subseteq \left[\mathfrak{m}^q + (\prod_{j=1}^{k-1} f_j)\right] \cap [\mathfrak{m}^q + (f_k)] \\ &= \mathfrak{m}^q + \left[(\prod_{j=1}^{k-1} f_j) \cap [\mathfrak{m}^q + (f_k)]\right].\end{aligned}$$

である. 元 $x \in (\prod_{j=1}^{k-1} f_j) \cap [\mathfrak{m}^q + (f_k)]$ を取ると，x は

$$\begin{aligned}x &= (\prod_{j=1}^{k-1} f_j)y \quad (y \in A) \\ &= z + f_k v \quad (z \in m^q,\ v \in A)\end{aligned}$$

と表すことができる.

$$(\prod_{j=1}^{k-1} f_j)y - f_k v = z \in \mathfrak{m}^q$$

であって，$(\prod_{j=1}^{k-1} f_j)^*$，${f_k}^*$ は $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ 内で正則列を成すので，$y \in \mathfrak{m}^{q-k+1} + (f_k)$ となり，従って $x = (\prod_{j=1}^{k-1} f_j)y \in \mathfrak{m}^q + (\prod_{j=1}^{k} f_j)$ であることがわかる. □

この主張から, 全ての $1 \leq i \leq d$ について，$x_i \in \mathfrak{m}^q$ であることが従い，$\alpha f \in \mathfrak{m}^q Q$ が得られる. ゆえに，$\mathfrak{m}^q I \subseteq \mathfrak{m}^q Q$ であるから，命題の証明が完結した. □

基礎環が Cohen-Macaulay 局所環なら，全ての巴系は正則列をなすので，命題 3.2 の証明中の等式 (A) から，$gx_i - f_j x_{ij} \in \mathfrak{m}^{q+1}$ が直ちに得られる. また，基礎環が Cohen-Macaulay 局所環のときは，主張　を示しさえすれば，等式 $I^2 = QI$ が容易に従う. しかしながら，基礎環 A が Cohen-Macaulay 環でない場合には，たとえ Buchsbaum 環であっても，そのような単純な議論を展開することはできない.

実際，等式 $I^2 = QI$ を得るためには，次の補題が必要である. この補題の証明は [GSa3, Lemma 2.3] を参照されたい.

補題 3.3 ([GSa3])**.** R は可換環，W, L, M は環 R のイデアル, a, b は R の元とし，次の 4 条件：$a \in M$, $aW = (0)$, $L : a = L : a^2$, $L : ab = L : b$ を仮定しよう. このとき，次の等式が成り立つ：

$$(L + (ab) + W) : M = [(L + W) : M] + [(L + (ab)) : M].$$

主定理内の等式 $I^2 = QI$ を得るために必要な 2 番目の命題は，下記のものである.

命題 3.4. A を *FLC* 環，$q \geq 1$ は整数とする. 整数 $\ell > 0$ を，イデアル $\mathfrak{m}^\ell$ が *standard* になるように取る.$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は環 A の巴系イデアルとし，$a_i \in \mathfrak{m}^\ell$ $(1 \leq i \leq d-1)$ と仮定する.$I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおき，次の 3 条件を仮定しよう.

(1) $\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q$ であって $I^2 \subseteq Q$ である.

(2) 2 元 $a \in \mathfrak{m}^q$ と $b \in \mathfrak{m}$ が存在し，$a_d = ab$ であってかつ二つの巴系 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{d-1}, a\}$ と $\{a_1, a_2, \cdots, a_{d-1}, b\}$ は，どちらも A の *standard* な巴系を成す.

(3) $d=1$ か $q \geq \ell$ のどちらかが成立する.

このとき，$I^2=QI$ である.

Proof. $\{a_1,a_2,\cdots,a_{d-1},a\}$ は standard な巴系であるから，$\{a_1,a_2,\cdots,a_d\}$ も standard な巴系である ([T, Corollary 3.3]).$W=\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$, $L=(a_1,a_2,\cdots,a_{d-1})$, $M=\mathfrak{m}^q$. とおく. すると $a\in M$, $aW=(0)$ であり, $W=W:M$ となる. また，$\{a_1,a_2,\cdots,a_{d-1},a\}$, $\{a_1,a_2,\cdots,a_{d-1},b\}$, $\{a_1,a_2,\cdots,a_{d-1},ab\}$ は，全て standard な巴系であるので, 各巴系は任意の順序で強 d-列を成す. 従って次が正しい.

$$L:a=L:a^2=L:ab=L:b=\bigcup_{n\geq 0}[L:\mathfrak{m}^n].$$

一方で, $L\subseteq \mathfrak{m}^\ell$ でありかつ $\mathfrak{m}^\ell$ は standard であるので, $\bigcup_{n\geq 0}[L:\mathfrak{m}^n]=L:\mathfrak{m}^\ell$ である ([T, Proposition 3.1]). 従って, $q\geq\ell$ なら, $L:a=L:M$ となる. ゆえに，補題 3.3 より，$d=1$ のとき

$$(Q+W):\mathfrak{m}^q=W+[Q:\mathfrak{m}^q]=W+I,$$

$q\geq \ell$ のとき

$$(Q+W):\mathfrak{m}^q=Q:\mathfrak{m}^q=I$$

であることが従う.

さて，命題を次元 d に関する帰納法で示そう.$d=1$ とし，$\overline{A}=A/W$, $\overline{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}/W$, $\overline{I}=I\overline{A}$, $\overline{Q}=Q\overline{A}$ とおく. すると，$\overline{I}=\overline{Q}:\overline{\mathfrak{m}}^q$ かつ $\overline{\mathfrak{m}}^q{\cdot}\overline{I}=\overline{\mathfrak{m}}^q{\cdot}\overline{Q}$ である. 元 $x\in\overline{I}^2$ を取る.$\overline{I}^2\subseteq\overline{Q}$ であるので, $x=a_1y$ $(y\in\overline{A})$ と表すことができる. 次に，$\alpha\in\overline{\mathfrak{m}}^q$ を取ると，$a_1(\alpha y)=\alpha x\in\overline{\mathfrak{m}}^q{\cdot}\overline{I}^2=\overline{\mathfrak{m}}^q{\cdot}\overline{Q}^2$ より, $a_1(\alpha y)=a_1^2z$ $(z\in\overline{A})$ と書くことができる.a_1 は $\overline{A}$ の正則元であるので, $\alpha y=a_1z\in\overline{Q}$ を得る. ゆえに，$y\in\overline{Q}:\overline{\mathfrak{m}}^q=\overline{I}$ であり，$x=a_1y\in\overline{Q}{\cdot}\overline{I}$ となる. 従って，$\overline{I}^2=\overline{Q}{\cdot}\overline{I}$ となり，$I^2\subseteq QI+W$ が得られる. ここで，$W\cap Q=(0)$ かつ $I^2\subseteq Q$ であることに注意すれば，$I^2\subseteq(QI+W)\cap Q=QI$ が従う.

$d\geq 2$ とし，$d-1$ まで命題は成立していると仮定する.$B=A/(a_1)$ とおく. すると，環 B の巴系イデアル $Q/(a_1)$ は条件 (1)，(2)，(3) を満たしているので，d についての帰納法の仮定より，$I^2\subseteq QI+(a_1)$ が従う. 元 $x\in I^2$ を取り，$x=y+a_1z$ $(y\in QI,\ z\in A)$ と表し，$\alpha\in\mathfrak{m}^q$ を取る. すると，$x\in I^2$ かつ $\mathfrak{m}^qI^2=\mathfrak{m}^qQ^2$ であるので

$$\alpha x=\alpha y+a_1(\alpha z)\in Q^2$$

である. ゆえに，$\alpha y\in Q^2$ であるから，$a_1(\alpha z)\in Q^2\cap(a_1)$ が得られる.$a_1,a_2,\cdots,a_d$ は d-列であるから $Q^2\cap(a_1)=a_1Q$ となることに注意すれば，元 $v\in Q$ を選び $a_1(\alpha z)=a_1v$ と表すことができる. ゆえに，$\alpha z-v\in(0):a_1\subseteq W$ である. すなわち，$z\in(Q+W):\mathfrak{m}^q$ である. いま $d\geq 2$ であるから $q\geq\ell$ のはずで，従って $(Q+W):\mathfrak{m}^q=I$ であることを思い出せば，$z\in I$ であることがわかり，$x=y+a_1z\in QI$ が従う. 故に，$I^2=QI$ である. □

命題 3.2 と命題 3.4 を組み合わせれば，次の主張が得られる. この定理 3.5 で，$\ell=1$ とおき，後藤–大関 [GO, Section 2] と後藤–西田 [GN, Section 5] を用いれば，基礎環 A が Buchsbaum の場合の主張，すなわち定理 2.1 が従う.

定理 3.5. *A は FLC 環とし，$\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m})\geq 2$ である仮定する. 整数 $\ell\geq 1$ を，イデアル $\mathfrak{m}^\ell$ が standard になるように取る.$Q=(a_1,a_2,\cdots,a_d)$ は環 A の巴系イデアルとする. 整数 $q\geq\ell$ をとり，$I=Q:\mathfrak{m}^q$ とおき，次の 2 条件を仮定する.*

(i) $Q\subseteq\mathfrak{m}^{q+\ell+1}$ である.

(ii) 2 元 $a\in\mathfrak{m}^q$ と $b\in\mathfrak{m}$ が存在し, $a_d=ab$ であってかつ $a_1,\cdots,a_{d-1},b$ は A の *standard* な巴系を成す.

このとき，$I^2=QI$ である. さらに，次の主張が正しい.

(1) $\mathrm{e}^1_I(A)=\mathrm{e}^0_I(A)+\mathrm{e}^1_Q(A)-\ell_A(A/I)$.

(2) I の *Hilbert* 函数は，全ての非負整数 $n \geq 0$ について，次の等式で与えられる：$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \sum_{i=2}^{d}(-1)^i \left[\mathrm{e}_Q^{i-1}(A) + \mathrm{e}_Q^{i}(A)\right]\binom{n+d-i}{d-i}$.

(3) 基礎環 A が *Buchsbaum* なら，I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ は，*Buchsbaum* 環である.

(4) 任意の整数 $i < d$ について

$$\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I)) = [\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_{1-i} \cong \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A)$$

であり，また

$$\max\left\{n \in \mathbb{Z} \;\mid\; [\mathrm{H}_M^d(\mathrm{G}(I))]_n \neq (0)\right\} \leq 1-d$$

である.

ただし，$M = \mathfrak{m}\mathrm{G}(I) + \mathrm{G}(I)_+$ は，環 $\mathrm{G}(I)$ の次数付き極大イデアルを表す.

Proof. 等式 $I^2 = QI$ は，命題 3.2 と 3.4 から直ちに従う. 主張 (1) と (2) は [GO, Section 2] を，主張 (3) と (4) は [GN, Section 5] を参照されたい. □

4 $\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m}) = 1$ のときの考察

$\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m}) = 1$ のときを考察する. 主結果は次の定理である.

定理 4.1. A は *Buchsbaum* 環で，$d = \dim A \geq 2$ とする.$\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ は *Buchsbaum* 環であって，$\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m}) = 1$ と仮定する.$M = \mathrm{G}(\mathfrak{m})_+$ とおき，

$$n := \min\{n \in \mathbb{Z} \;\mid\; [\mathrm{H}_M^1(\mathrm{G}(\mathfrak{m}))]_n \neq (0)\}$$

とする. このとき，$n \geq 0$ である. $Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は環 A の巴系イデアルとし，$Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}$ を満たすと仮定する. 整数 $1 \leq q \leq n+1$ をとり，$I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおく. このとき，次の主張が正しい.

(1) $\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q$,

(2) $I \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}$.

もしもさらに $a_d = ab$ $(a \in \mathfrak{m}^q,\ b \in \mathfrak{m})$ となっているなら，

(3) $I^2 = QI$

が正しい. 従って，定理 2.1 の主張 (1), (2), (3) は，$\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m}) = 1$ であって正しい.

この定理の証明は定理 2.1 とほぼ同様である.$1 \leq q \leq n+1$ の仮定がどこに効いてくるかに注意しながら，以下に証明を述べたい.

Proof. 元 $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ をその初項形式 f^* が $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ 内で正則元となるように取る. すると，環 $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ は $\operatorname{depth}\mathrm{G}(\mathfrak{m}) = 1$ の Buchsbaum 環であるので，次数付き $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ 加群としての次の同型

$$\mathrm{H}_M^0(\mathrm{G}(\overline{\mathfrak{m}})) \cong \left[\mathrm{H}_M^1(\mathrm{G}(\mathfrak{m}))\right](-1),$$

を得る. ただし $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/(f)$ である. 従って

$$n+1 \geq \min\{n \in \mathbb{Z} \;\mid\; [\mathrm{H}_M^0(\mathrm{G}(\overline{\mathfrak{m}}))]_n \neq (0)\} \geq 1$$

であり，$n \geq 0$ であることがわかる.

主張 (1) を示す.$q \geq 2$ として十分である.($q=1$，つまり $I=Q:\mathfrak{m}$ の場合は，[GSa1, GSa2, GSa3] を参照されたい.) 命題 3.2 の証明と同様に，剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限であるので，イデアル $\mathfrak{m}^q$ の生成系を次のように選ぶことができる：
$F=\left\{f_1\dots f_q \mid \text{各 } 1\leq i\leq q \text{ について } f_i\in\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2 \text{であり}, 1\leq i<j\leq q \text{ なら } f_i^*, f_j^* \text{は G}(\mathfrak{m}) \text{ 内で斉次部分巴系をなす}\right\}$.
$\alpha\in I$ と $f=\prod_{i=1}^q f_i\in F$ を取る. すると次の等式を得る.

$$\alpha f=\sum_{i=1}^d a_ix_i \quad (x_i\in A)$$

$x_i\in\mathfrak{m}^q, 1\leq\forall i\leq d$ を示せばよい. 元 $g\in\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2$ を，全ての $1\leq j\leq q$ について g^*, f_j^* が $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ 内で斉次部分巴系を成すように取る. 整数 $1\leq j\leq q$ を 1 つ固定し，$g_j=\prod_{1\leq k\leq q,\ k\neq j} f_k$ とおく. すると次を得る.

$$\alpha(g_jg)=\sum_{i=1}^d a_ix_{ij} \quad (x_{ij}\in A)$$

ここで, 前式と連立すると, 次の等式を得る.

$$\sum_{i=1}^d a_i(f_jx_{ij})=\sum_{i=1}^d a_i(gx_i),$$

ゆえに，各整数 $1\leq i\leq d$ について，次が正しい：

$$gx_i-f_jx_{ij}\in(a_1,\cdots,\check{a_i},\cdots a_d):a_i.$$

環 A は Buchsbaum 環であるので，全ての巴系は弱列をなす. ゆえに

$$(a_1,\cdots,\check{a_i},\cdots a_d):a_i=(a_1,\cdots,\check{a_i},\cdots a_d):\mathfrak{m}$$

である. よって，補題 3.1 より，$Q:\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}^{q+1}$ であるから,

$$gx_i-f_jx_{ij}\in\mathfrak{m}^{q+1}$$

となる.
$\overline{A}=A/(f_j)$，$\overline{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}/(f_j)$ とし, $\overline{*}$ によって $\overline{A}$ 内での像を表すことにしよう. すると

$$\overline{g}\cdot\overline{x_i}\in\overline{\mathfrak{m}}^{q+1}$$

である. これより，$\overline{x_i}\in\overline{\mathfrak{m}}^q$ が従う. 実際，$\overline{x_i}\notin\overline{\mathfrak{m}}^q$ と仮定してみよう.$\ell=\mathrm{o}_{\overline{\mathfrak{m}}}(\overline{x_i})$ とおくと，$\ell\leq q-1$ である. 一方で，$\overline{g}^*$ は Buchsbaum 環 $\mathrm{G}(\overline{\mathfrak{m}})$ の斉次部分巴系であってかつ $\overline{g}^*\cdot\overline{x_i}^*=0$ であるので,

$$0\neq\overline{x_i}^*\in\mathrm{H}_M^0(\mathrm{G}(\overline{\mathfrak{m}}))\cong\left[\mathrm{H}_M^1(\mathrm{G}(\mathfrak{m}))\right](-1)$$

となる. ゆえに，$\left[\mathrm{H}_M^1(\mathrm{G}(\mathfrak{m}))\right]_{\ell-1}\neq(0)$ となり，$n\leq\ell-1\leq q-2$ を得るが，これは $q\leq n+1$ という仮定に反する. 従って，$x_i\in\mathfrak{m}^q+(f_j)$ $(1\leq\forall i\leq d, 1\leq\forall j\leq q)$ である.
命題 3.2 の証明内の Claim 1 とほぼ同様に，$x_i\in\mathfrak{m}^q$, $(1\leq i\leq d)$ を得る. 少し違うところもあるので，留意すべき点だけ記録しておく. 命題 3.2 の証明内の Claim 1 の証明は，$y\in\mathfrak{m}^{q-(k-1)}+(f_k)$ を示すことが鍵であった.$\overline{y}\notin\overline{\mathfrak{m}}^{q-(k-1)}$ と仮定してみよう. すると，$\overline{\prod_{j=1}^{k-1}f_j}\cdot\overline{y}\in\overline{\mathfrak{m}}^q$ であり，$\left(\overline{\prod_{j=1}^{k-1}f_j}\right)^*$ は Buchsbaum 環 $\mathrm{G}(\overline{\mathfrak{m}})$ の斉次部分巴系を成すので, $\overline{y}^*\in\mathrm{H}_M^0(\mathrm{G}(\overline{\mathfrak{m}}))$ を得る. 同型

$$\mathrm{H}_M^0(\mathrm{G}(\overline{\mathfrak{m}}))\cong\left[\mathrm{H}_M^1(\mathrm{G}(\mathfrak{m}))\right](-1) \quad (\overline{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}/(f_k))$$

と整数 n の定義より，$n+1\leq\mathrm{o}_{\overline{\mathfrak{m}}}(\overline{y})\leq q-k\leq q-2$ となるが，これは $q\leq n+1$ という q の取り方に反する. ゆえに, $y\in\mathfrak{m}^{q-(k-1)}+(f_k)$ となり，命題 3.2 の証明内の Claim 1 がそのまま正しく，最終的に $\mathfrak{m}^qI=\mathfrak{m}^qQ$ であることがわかる. 補題 3.1 から，$I\subseteq\mathfrak{m}^{q+2}$ が従う.
残りの主張は, 定理 2.1 と全く同様に証明される. $\square$

5 Example

我々の主定理2.1, 4.1の条件を満たす環を具体的に与えておきたい. $d>0, n \geq 0$は整数とする.$U = k[X_1, \cdots, X_d, Y_1, \cdots, Y_d]$は体 k 上の $2d$ 変数多項式環とし，$\mathfrak{a} = (Y_1, \cdots, Y_d)^{n+2} + (\sum_{i=1}^{d} X_i Y_i^{n+1})$ とおく. 次数環 R

$$R = k[X_1, \cdots, X_d, Y_1, \cdots, Y_d]/\mathfrak{a}$$

を考えよう. $M = R_+$, $A = R_M$, $\mathfrak{m} = MR_M$ とおく.

Example 5.1. 次が正しい.

(1) $\dim R = d$, $\operatorname{depth} R = d-1$ である.

(2) 次数 R-加群として $\mathrm{H}_M^{d-1}(R) \cong [R/M](-(n+2-d))$ である.

(3) R は Buchsbaum 環である.

(4) $\mathrm{e}_{\mathfrak{m}}^0(A) = \binom{d+n+1}{d} - 1$ である.

$R \cong \mathrm{G}(\mathfrak{m})$ であるから，環 A は，$d \geq 3$ のとき定理 2.1 の，$d=2$ のとき定理 4.1 の例となっている (定理 4.1 の整数 n は，ここで選んだ整数 n に等しい).

Proof. $\mathfrak{p} = (Y_i \mid 1 \leq i \leq d)$, $f = \sum_{i=1}^{d} X_i Y_i^{n+1}$, $V = U/\mathfrak{p}$ とおく. ゆえに $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{n+2} + (f)$ である. 次の 2 つの次数付き R-加群の短完全列を見る：

$$\begin{aligned} &(1) \qquad 0 \to \mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{a} \to R \to U/\mathfrak{p}^{n+1} \to 0, \\ &(2) \qquad 0 \to \mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{n+2} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{p}^{n+2} \to \mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{a} \to 0 \end{aligned}$$

すると $\mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{p}^{n+2}$ は自由 V 加群であって，その自由基底は $\{Y^\alpha \bmod \mathfrak{p}^{n+2}\}_{\alpha \in \Lambda}$ で与えられる. 但し $\Lambda = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d) \mid$ 各 $1 \leq i \leq d$ について $0 \leq \alpha_i \in \mathbb{Z}$ であってかつ $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i = n+1\}$ とし，各 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d) \in \Lambda$ に対し，$Y^\alpha = \prod_{i=1}^{d} Y_i^{\alpha_i}$ と定める. ゆえに，$\mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{p}^{n+2} \cong V^q(-(n+1))$ ($q = \binom{d+n}{d-1}$) である. また，f^* は $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ の正則元であるので，

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{n+2} \cong (f)/[(f) \cap \mathfrak{p}^{n+2}] \cong (f)/f\mathfrak{p} \cong V(-(n+2))$$

となり，$\mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{n+2} \cong V(-(n+2))$ であることがわかる. 従って，完全列 (2) における埋め込み写像 $\varphi : \mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{n+2} \to \mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{p}^{n+2}$ は，次の形で行列表示される：

$$\begin{pmatrix} X_1 \bmod \mathfrak{p} \\ X_2 \bmod \mathfrak{p} \\ \vdots \\ X_d \bmod \mathfrak{p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

従って，$\mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{a} \cong$

$$V^{q-d}(-(n+1)) \bigoplus \left[\mathrm{Syz}_V^{d-1}(V/(X_1, \cdots, X_d)V)\right](-(n+2-d))$$

である. ここで $\mathrm{Syz}_V^{d-1}(V/(X_1, X_2, \cdots, X_d)V)$ は，V の剰余体 $V/(X_1, X_2, \cdots, X_d)V$ の $d-1$ 次 syzygy 加群を表している. ゆえに，$L = \mathfrak{p}^{n+1}/\mathfrak{a}$ とおくと，$\operatorname{depth}_R L = d-1$ であることと，次数付き R-加群の同型

$$\mathrm{H}_M^{d-1}(L) \cong (R/M)(-(n+2-d))$$

が従う．$U/\mathfrak{p}^{n+1}$ は次元 d の Cohen-Macaulay 環であるので，完全列 (1) から，$\operatorname{depth} R = d-1$ であって

$$\mathrm{H}_M^{d-1}(R) \cong \mathrm{H}_M^{d-1}(L) \cong (R/M)(-(n+2-d))$$

であることがわかる．ゆえに，R は Buchsbaum 環である（[SV, Corollary 1.1]）．また，$\operatorname{Min}_U R = \{\mathfrak{p}\}$ であるので，重複度の結合公式から，等式

$$\mathrm{e}_{\mathfrak{m}}^0(A) = \ell_{U_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) = \binom{n+d+1}{d} - 1$$

が従う． □

参考文献

[CHV] A. Corso, C. Huneke, and W. V. Vasconcelos, *On the integral closure of ideals*, Manuscripta Math., **95** (1998), 331–347.

[CP1] A. Corso and C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras,* J. Algebra, **178** (1995), 224–238.

[CP2] A. Corso and C. Polini, *Reduction number of links of irreducible varieties,* J. Pure Appl. Algebra, **121** (1997), 29–43.

[CPV] A. Corso, C. Polini, and W. V. Vasconcelos, *Links of prime ideals,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **115** (1994), 431–436.

[G1] S. Goto, *Integral closedness of complete intersection ideals,* J. Algebra, **108** (1987), 151–160.

[G2] S. Goto, *On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings*, J. Alg., **85** (1983), 490–534.

[GKM] S. Goto, S. Kimura, and N. Matsuoka, *Quasi-socle ideals in Gorenstein numerical semigroup rings*, J. Algebra, **320** (2008) 276–293

[GKMP] S. Goto, S. Kimura, and N. Matsuoka, T. T. Phuong, *Quasi-socle ideals in local rings with Gorenstein tangent cones*, J. Commutative Algebra, (to appear).

[GKTP] S. Goto, S. Kimura, H. L. Truong, and T. T. Phuong, *Quasi-socle ideals and Goto numbers of parameters*, J. Pure App. Algebra (to appear).

[GMT] S. Goto, N. Matsuoka, and Ryo Takahashi, *Quasi-socle ideals in a Gorenstein local ring,* J. Pure App. Algebra, **212** (2008) 969–980.

[GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra, Vol **181** (2003), 61–74.

[GO] S. Goto and K. Ozeki, *The structure of Sally modules – towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases –*, Preprint (2009).

[GSa1] S. Goto and H. Sakurai, *The equality $I^2 = QI$ in Buchsbaum rings*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **110** (2003), 25–56.

[GSa2] S. Goto and H. Sakurai, *The reduction exponent of socle ideals associated to parameter ideals in a Buchsbaum local ring of multiplicity two*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 1157–1168.

[GSa3] S. Goto and H. Sakurai, *When does the equality $I^2 = QI$ hold true in Buchsbaum rings?*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **244** (2006), 115–139.

[PU] C. Polini and B. Ulrich, *Linkage and reduction numbers,* Math. Ann., **310** (1998), 631–651.

[Sch] P. Schenzel, *Multiplizitäten in verallgemeinerten Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr., **88** (1979), 295–306.

[SV] J. Stückrad and W. Vogel, *Toward a theory of Buchsbaum singularities*, Amer. J. Math., **100** (1978), 727-746.

[T] N. V. Trung, *Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 1–49.

[VV] P. Valabrega and G. Valla, *Form rings and regular sequences,* Nagoya. Math. J., **72** (1978), 93–101.

[Wan] H.-J. Wang, *Links of symbolic powers of prime ideals,* Math. Z., **256** (2007), 749–756.