不定値二元二次形式の類数和に関する漸近公式について

橋本康史

1 Introduction

原始的不定値二元二次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同値類と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の素な双曲的共役類との間には 1 対 1 の対応があり，また，二次形式の基本単数が，対応する $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の共役類の固有値の大きい方に一致することが知られている（[Ga]）．このことから，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する素測地線定理（[He]，[Se]）を二次形式の言葉で記述しなおすことで，次の漸近公式が得られる（[Sa1]）．

$$\sum_{\substack{D>0, D\equiv 0,1 \bmod 4 \\ \epsilon(D)<x}} h(D) \sim \mathrm{li}(x^2). \tag{1.1}$$

ここで，$\mathrm{li}(x) := \int_2^x (\log t)^{-1} dt \sim x/\log x$ で，$h(D), \epsilon(D)$ はそれぞれ判別式 $D > 0$ に関する狭義の類数と基本単数である．これは本質的に，ガウスが予想しジーゲル [Si] によって証明が与えられた，

$$\sum_{D<x} h(D) \log \epsilon(D) \sim \frac{\pi^2}{18\zeta(3)} x^{3/2}$$

の和をとる順番を取り替えたものであり，類数や基本単数の分布を調べるうえで，興味深い比較対象であるといえる．

本稿では，(1.1) 型の漸近公式について，この部分和をとったものを取り扱う．このような部分和に関する研究はいくつかなされており（[Sa2], [H1] を参照），とくに，[Ra] では，

$$\sum_{D\equiv a \bmod n, \epsilon(D)<x} h(D) = C_{n,a}\mathrm{li}(x^2) + O(x^{2-\epsilon})$$

が示された．実は，この証明において，素測地線定理は用いられていない．類数公式を利用して，問題を，ディリクレ L 関数の 1 での値の和の評価を行う，という方針で証明がなされている．[Ra] では，非常に労力を要する計算が丁寧になされていて，主要項の係数 $C_{n,a}$ まで，きちんと記述されている．ただ，$C_{n,a}$ の表示のし方は複雑で，具体的にどんな

値かを知りたいと思っても，そのためにさらに面倒な計算をする必要があるため，はっきりと実体をつかみにくい．

本稿では，素測地線定理を用いて，この係数をよりシンプルな形で記述しなおすこと，そして，誤差項についてもそれなりの評価を与えることを目標にする．なお，本稿では，大雑把な方針を述べるにとどめる．詳細な証明に関しては，[H2] を参照していただきたい．

2 素測地線定理

$H := \{x + y\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ を双曲的な距離のはいった複素上半平面，Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群で，対応するリーマン面 $\Gamma\backslash H$ の体積が有限であるとする．$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類の集合，$N(\gamma)$ を $\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ の固有値の大きいほうとする．このとき，Γ に関する素測地線定理は，次で与えられる（[He]，[Se]）．

$$\pi_\Gamma(x) := \#\{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid N(\gamma) < x\} = \mathrm{li}(x) + \sum_{0<\lambda_j\le 1/4} \mathrm{li}\left(x^{s_j}\right) + R_\Gamma(x). \tag{2.1}$$

ここで，$\mathrm{li}(x) := \int_2^x (\log t)^{-1} dt$，$\lambda_j$ は $\Gamma\backslash H$ 上のラプラシアンの j 番目の固有値，$s_j := 1/2 + \sqrt{1/4 - \lambda_j}$，そして，$R_\Gamma(x)$ は，$\lambda_j > 1/4$ なる固有値の寄与によって与えられる誤差項で，今のところ $R_\Gamma(x) = O(x^{3/4})$ と評価されている．

次に，Γ' を Γ の指数有限な正規部分群，$G := \Gamma'\backslash\Gamma$，$\iota : \Gamma \to G$ を自然な射影とする．このとき，与えられた G の共役類 $[g]$ に対して，チェボタレフ型素測地線定理とよばれる次の漸近式が成り立つことが知られている（[Sa1]，[Su] を参照）．

$$\pi_\Gamma(x; [g], \Gamma') := \#\{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid N(\gamma) < x, \iota(\gamma) \subset [g]\} = \frac{\#[g]}{\#G}\mathrm{li}(x) + R_\Gamma(x; [g], \Gamma'). \tag{2.2}$$

右辺の第二項 $R_\Gamma(x; [g], \Gamma')$ は，この漸近公式の誤差項である．一般に，この誤差項を係数込みで評価するのは非常に難しいが，Jorgenson-Kramer の補題 [JK] を使うと，次のような評価を得る．

$$|R_\Gamma(x; [g], \Gamma')| \le B_\Gamma \#[g] x^{\max(\tilde{s}_j, 3/4)}, \tag{2.3}$$

ここで，B_Γ は Γ にのみ依存する（$[g]$ には依存しない）定数，そして，$\tilde{s}_j$ は $\Gamma'\backslash H$ 上のラプラシアンの固有値から与えられる定数である．なお，本稿の主結果を求める際に用いられるのは，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で Γ' が主合同部分群の場合のチェボタレフ型素測地線定理だが，この場合には，(2.3) の x のべきは $3/4$ ととることができる（[Se]，[LRS]，[KS]，[Ki] など）．

3 モジュラー群と二次形式

$\mathbb{Z}$ 上の二次形式を

$$[a,b,c] := ax^2 + bxy + cy^2$$

と書き，$\gcd(a,b,c)=1$ とする．判別式を $D := b^2-4ac$ で定義し，$D>0$ の場合を考える．このとき，このような二次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同値類と $\mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ との間には次のような 1 対 1 対応があることが知られている（[Ga]）．

$$ax^2+bxy+cy^2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{t+bu}{2} & -cu \\ au & \dfrac{t-bu}{2} \end{pmatrix}.$$

ここで，$t,u>0$ はペル方程式 $t^2-Du^2=4$ の正の最小解である．このとき，$\epsilon(D) := (t+u\sqrt{D})/2$ は狭義の基本単数で，対応する $\gamma \in \mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の固有値の大きいほう（つまり $N(\gamma)^{1/2}$）に一致するので，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する素測地線定理が (1.1) と同じものであることがわかる．

次に，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 上での $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の元の性質が，対応する二次形式の判別式にどう反映されるか調べよう．ここで，与えられた自然数 n に対して，$n \mid u$ ならば，対応するモジュラー群の元が階数 n の主合同部分群

$$\hat{\Gamma}(n) := \mathrm{Ker}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \overset{\text{proj.}}{\to} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_n)\big) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \alpha I \bmod n, \alpha^2 \equiv 1 \bmod n\}$$

の元になっていることに注意する．

まず，p を素数，$r \geq 1, k \geq 0$ を整数として，$\gamma \in \hat{\Gamma}(p^k) - \hat{\Gamma}(p^{k+1})$ なる γ をとってくる．このとき，$p^k \,||\, u$ なので，

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(T+Bp^k) & -Cp^k \\ Ap^k & \dfrac{1}{2}(T-Bp^k) \end{pmatrix} \bmod p^{r+k}$$

と書ける．ここで，

$$A \equiv a(u/p^k), \quad B \equiv b(u/p^k), \quad C \equiv c(u/p^k) \bmod p^r, \quad T \equiv t \bmod p^{r+k}$$

である．また，$D_p = B^2-4AC$ とおくと，

$$D_p \equiv D(u/p^k)^2 \bmod p^r, \quad T^2 \equiv 4 + D_p p^2 k \bmod p^{r+k}$$

が成り立つことがわかる．以上のことから，チェボタレフ型素測地線定理を用いて，

$$\sum_{\substack{D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u \\ \epsilon(D)<x}} h(D) \sim \frac{\#\{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z}) \mid D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u\}}{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z})} \mathrm{li}(x^2),$$

$$\left| \sum_{\substack{D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u \\ \epsilon(D)<x}} h(D) - \frac{\#\{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z}) \mid D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u\}}{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z})} \mathrm{li}(x^2) \right|$$
$$\leq B_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \#\{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z}) \mid D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u\} x^{3/2}$$

を得る．上の主要項と誤差項にでてくる定数は，具体的に計算することができる値なので，これで欲しい漸近式の部分的な情報を得たことになる．

4 主結果

$\mathcal{C}$ を判別式 D に関する「条件」としたとき，$\pi(x;\mathcal{C})$ を

$$\pi(x;\mathcal{C}) := \sum_{\substack{\mathcal{C} \text{ をみたす } D \\ \epsilon(D)<x}} h(D)$$

と定義する．また，$\lim_{x\to\infty} \pi(x;\mathcal{C})/\mathrm{li}(x^2)$ が存在するとき，

$$\eta(\mathcal{C}) := \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x;\mathcal{C})}{\mathrm{li}(x^2)}, \quad R(x;\mathcal{C}) := \pi(x;\mathcal{C}) - \eta(\mathcal{C})\mathrm{li}(x^2)$$

とおく．このとき，前節最後に出てきた漸近式を使うと，次の漸近公式を得る．

Proposition 4.1. p を奇素数，$r \geq 1$ を整数，$\delta \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\eta(D_p \equiv \delta \bmod p^r) = \sum_{k\geq 0} \eta(D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u)$$
$$= \frac{1}{p^{r-1}(p^2-1)(p^3-1)} \times \begin{cases} 2p^2(p^2-1), & (\delta \bmod p), \\ \left(2 + p^{[r/2]}(p^3-1)\right)\left(p + (\delta/p)\right), & (\delta + 4 \equiv 0 \bmod p^r), \\ 2(1 + p^l(p^3-1))\left(p + (\delta/p)\right), & (\delta + 4 \equiv \exists \alpha^2 p^{2l} \bmod p^r), \\ 2\left(p + (\delta/p)\right), & (\mathit{otherwise}), \end{cases}$$
$$R(D_p \equiv \delta \bmod p^r) = O(x^{3/2+\epsilon}).$$

$p = 2$ の場合の結果については，[H2] を参照．

Proof. （概略のみ）まず，$t^2 - Du^2 = 4$ なので，$u < t$ である．また，t は $\epsilon(D)$ を四捨五入して得られるので，$\epsilon(D) < x$ のとき，$u < x$ であると考えてよい．なので，

$$\begin{aligned}
&\pi(x; D_p \equiv \delta \bmod p^r) \\
=& \sum_{k \geq 0, p^k < x} \pi(x; D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u) \\
=& \sum_{k \geq 0, p^k < x} \left(\eta\left(D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u\right) \mathrm{li}(x^2) + R\left(x; D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u\right)\right) \\
=:& \; L_1(x)\mathrm{li}(x^2) + L_2(x)
\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\eta(D_p \equiv \delta \bmod p^r, p^k \,||\, u) \leq \eta(p^k \mid u) = \#\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{-1} \leq Cp^{-3k}$$

なので，$L_1(x) = \lim_{x\to\infty} L_1(x) + O(x^{-3})$ をみたす．$L_2(x)$ についても，同じくらいの大きさで上から評価されているものを $[\log_p x]$ 個足しているので，Proposition 4.1 にあるような，誤差項の評価が得られる．主要項の係数 $\eta(D_p \equiv \delta \bmod p^r)$ の具体的な値の計算については，省略する． □

このProposition 4.1 を使えば，欲しかった次の定理を得る．

Theorem 4.2. $n \geq 1$ を $n = \prod_{p|n} p^r$ と素因数分解される整数，$\delta \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする．そして，$\Delta(\delta; n) := \{m^2\delta \in \mathbb{Z}_n \mid m \in \mathbb{Z}_n^*\}$ とすると，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\eta(D \equiv \delta \bmod n) &= \sum_{\delta' \in \Delta(\delta;n)} \left(\prod_{p|n} \eta(D_p \equiv \delta' \bmod p^r)\right) \xi(n) \sum_{\substack{m:\gcd(m,n)=1 \\ \delta' \equiv m^2\delta \bmod n}} \beta(m), \\
R(x; D \equiv \delta \bmod n) &= O\left(x^{5/3+\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

ここで，$v(n) := \#\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$，

$$\xi(n) := \prod_{p \nmid n} \left(1 - v(p)^{-1}\right), \qquad \beta(n_1) := \prod_{p|n_1} \frac{v(p^l)^{-1} - v(p^{l+1})^{-1}}{1 - v(p)^{-1}} \quad \mathit{for} \quad n_1 = \prod_{p|n_1} p^l$$

である．とくに，$\#\Delta(\delta; n) = 1$，または，全ての $\delta_1, \delta_2 \in \Delta(\delta; n)$ について

$$\prod_{p|n} \eta\left(D_p \equiv \delta_1 \bmod p^r\right) = \prod_{p|n} \eta\left(D_p \equiv \delta_2 \bmod p^r\right)$$

をみたすとき，

$$\eta(D \equiv \delta \bmod n) = \prod_{p|n} \eta\left(D_p \equiv \delta \bmod p^r\right)$$

が成り立つ．

Proof. （概略のみ）まず，$p^k \,||\, u$ のとき，$D_p = D(u/p^k)^2$ であることを思い出す．なので例えば，“$D \equiv 1 \bmod 5$”という条件については，

$$\pi(x; D \equiv 1 \bmod 5) = \sum_{k \geq 0, 5^k < x} \Big[\pi(x; D_5 \equiv 1 \bmod 5, 5^k \,||\, u, u/5^k \equiv 1, 4 \bmod 5) + \pi(x; D_5 \equiv 4 \bmod 5, 5^k \,||\, u, u/5^k \equiv 2, 3 \bmod 5) \Big]$$

が成り立つことがわかる．あとは，各々の項を丁寧に計算すればよい．ただ，上の式のままで誤差項を絶対評価していくと，(やり方にもよるが）主要項を超えてしまうので，最初に

$$\pi(x; D \equiv 1 \bmod 5) = \pi(x; D \equiv 1 \bmod 5, u < T) + \pi(x; D \equiv 1 \bmod 5, u > T)$$

と分けておいて，前者を Proposition 4.1 と同じようなやり方で，後者を古典的によく知られている

$$h(D) < \exists C \frac{D^{1/2} \log D}{\log \epsilon(D)}$$

を使って評価しておき，あとで評価が最良になるように $T > 0$ を定めればよい． □

謝辞． 本研究は，日本学術振興会科研費若手研究 B（課題番号 20740027）の助成を受けたものである．また，第 15 回代数学若手研究集会の世話人の皆さまには，講演と本稿の執筆の機会を与えていただいたことを感謝したい．

参考文献

[Ga] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Fleischer, Leipzig, (1801).

[H1] Y. Hashimoto, *Asymptotic formulas for partial sums of class numbers of indefinite binary quadratic forms*, arXiv.math/0807.0056.

[H2] Y. Hashimoto, *Asymptotic formulas for class number sums of indefinite binary quadratic forms in arithmetic progressions*, arXiv.math/1003.3716.

[He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *I, II*, Lec. Notes in Math. **548, 1001** Springer, (1976, 1983).

[JK] J. Jorgenson and J. Kramer, *On the error term of the prime geodesic theorem*, Forum Math. **14** (2002), 901-913.

[Ki] H. H. Kim, *Functionality for the exterior square of* GL_4 *and the symmetric fourth of* GL_2 *(with Appendix 1 by D. Ramakrishnan and Appendix 2 by Kim and P. Sarnak)*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 139–183.

[KS] H. H. Kim and F. Shahidi, *Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. **112** (2002), 177–197.

[LRS] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 387–401.

[Ra] N. Raulf, *Asymptotics of class numbers for progressions and for fundamental discriminants*, Forum Math. **21** (2009), 221-257.

[Sa1] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory, **15** (1982), 229-247.

[Sa2] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms II*, J. Number Theory, **21** (1985), 333–346.

[Se] A. Selberg, *Collected Papers I*, Springer-Verlag (1989).

[Si] C. L. Siegel, *The average measure of quadratic forms with given determinant and signature*, Ann. of Math. II, **45** (1944), 667-685.

[Su] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications*, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 266–284, Lecture Notes in Math. **1201**, Springer, Berlin, 1986.

橋本康史
〒 814-0001 福岡市早良区百道浜 2-1-22 7F
（財）九州先端科学技術研究所
e-mail:hasimoto@isit.or.jp