行列式環の F-pure threshold

千葉 隆宏

名古屋大学 多元数理科学研究科

2010 年 3 月 4 日

講演内容

- F-pure threshold の紹介
- 正標数の可換環論の準備
- F-pure threshold の定義
- 主結果
- Fedder 型の判定法

F-pure threshold とは？

- F-pure threshold
  - R : char $p > 0$, F-pure $\mathfrak{a} \subset R$: ideal
  - $\mathbf{fpt}(R, \mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: **不変量**.
- log canonical threshold
  - k : char 0, X : $\mathbb{Q}$-Gor. normal var./k, $Y \subset X$: closed sub var.
  - $\mathbf{lct}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: **不変量**.
  - **高次元の代数多様体の特異点の解析**.

基本的事項I

- 環は可換 Noether 整域.
- p:素数, $q = p^e$ $(e \in \mathbb{N})$.
- 環が標数 $p \Longleftrightarrow$ 体 $\mathbb{F}_p$ を含む.
- 標数 p の環とイデアル I に対して $I^{[q]} = (a^q \mid a \in I)$.

Definition (Frobenius 射)

R:標数 p の環.

$$F: \begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R \\ x & \longmapsto & x^p \end{array}$$

基本的事項II

Definition

標数 p の環 R が F-finite $\Longleftrightarrow$ $R^{1/p}$ が有限生成 R 加群.

F-finite な環の例

- 標数 p の完全体は F-finite.
- F-finite な環上の多項式環は F-finite.
- F-finite な環の局所化や剰余環, 完備化も F-finite.

Definition

R:標数 p の環, F-finite.
R:F-pure $\Longleftrightarrow$ $R \longrightarrow R^{1/p}$ が split.

Proposition(Fedder の判定法)

$(S, \mathfrak{n})$: 標数 p の正則局所環, $R = S/I$.
R:F-pure $\Longleftrightarrow$ $(I^{[p]} : I) \not\subset \mathfrak{n}^{[p]}$.

組が F-pure

Definition

R:標数 p, F-finite, $0 \neq \mathfrak{a} \subset R$:イデアル. $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
$(R, \mathfrak{a}^t)$ が F-pure
$\Longleftrightarrow \forall q = p^e >> 0, \exists \alpha \in \mathfrak{a}^{\lfloor t(q-1) \rfloor}$ s.t.
$R \longrightarrow R^{1/q} \xrightarrow{\alpha^{1/q}} R^{1/q}$ が split.

定義から

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ のとき,
  $(R, \mathfrak{a}^t)$:F-pure $\Longrightarrow (R, \mathfrak{b}^t)$:$F$-pure.
- (R, R):F-pure $\Longleftrightarrow R$:F-pure.

F-pure threshold の定義

Definition

$$\begin{aligned}\mathrm{fpt}(R,\mathfrak{a}) &= \mathrm{fpt}(\mathfrak{a})\\ &:= \sup\{t\in\mathbb{R}_{\geq 0} \mid (R,\mathfrak{a}^t)\text{ は }F\text{-pure}\}\end{aligned}$$

を組 $(R,\mathfrak{a})$ に対する F-pure threshold と呼ぶ.

・局所環 $(R,\mathfrak{m})$ に対して $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ を調べることで環の性質を調べたい.

$(R, \mathfrak{m})$ の $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$

Proposition(Takagi-Watanabe)

$(R, \mathfrak{m})$:標数 p, F-finite, $\dim R = d, \#(R/\mathfrak{m}) = \infty$
このとき以下は同値.

- R : 正則局所環.
- $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = d$.
- $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) > d - 1$.

行列式環について

行列式環

k : 体, $X = (X_{ij})$: $r \times s$ 行列, $S = k[X]$,
$I = I_t(X)$: X の t 次小行列式全体で生成.
$R = S/I$: 行列式環.

→行列式環の完備化について $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ を考える.

- $r = s$: Gorenstein. $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = -a(R)$.
- 2×3, $t = 2$ のとき計算.

主結果

Theorem

k を完全体, X : 2×3 行列, $I = I_2(X) \subset S$: 2 次小行列式で生成. $R = S/I$, $\mathfrak{m}$: R の極大イデアルとするとき,

$$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = 2.$$

Key Point

- Fedder 型の判定法.
- $I^{[p]} : I = I^{[p]} + I^{2p-2}$.
- $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ は p に依らない.

Fedder 型の判定法 I

- F-pure threshold は具体的対象についてまともに計算できる場合が少ない.

Fedder 型の判定法

$(S, \mathfrak{n})$:標数 p, F-finite 正則局所環, $I, \mathfrak{a} \subset S$:イデアル, $R = S/I$. $(R, (\mathfrak{a}R)^t)$ が F-pure $\iff \forall q >> 0$, $\mathfrak{a}^{\lfloor t(q-1) \rfloor}(I^{[q]} : I) \not\subset \mathfrak{n}^{[q]}$.

Fedder 型の判定法 II

下から評価するとき

char $k = 2$, $S = k[[X, Y]]$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{n} = (X, Y)$,
$I = (f = X^3 + XY + Y^3)$.
$\mathfrak{n}^{[4]} = (X^4, Y^4, Z^4)$.
$X^2Y^2f \equiv X^3Y^3 \not\equiv 0 \mod \mathfrak{n}^{[4]}$.
よって $\mathfrak{n}^4 f \not\subset \mathfrak{n}^{[4]}$.

上から評価するとき

$\mathfrak{n}$: n 元で生成されるとき,

$$\mathfrak{n}^{n(q-1)+1} \subset \mathfrak{n}^{[q]}.$$

Fedder 型の判定法:使用例

Du Val singularities (D_n 型, $n \geq 4, p > 2$)

$S = k[[X, Y, Z]], R = S/(f = X^2 + Y^{n-1} + YZ^2), \mathfrak{n} = (X, Y, Z), \mathfrak{m} = \mathfrak{n}R$ のときの $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$.

Fedder 型の判定法より

$$\mathfrak{n}^{\lfloor t(q-1) \rfloor}(f^{[q]} : f) \not\subset \mathfrak{n}^{[q]}$$

となる $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を調べる.
$(f)^{[q]} : f = (f)^{q-1}$.

Fedder 型の判定法:使用例

方針

- f^{q-1} から総次数の低い項を見つける.
- $q-1$ を p 進展開して f^{p-1} のときに落とし込む.

$$q-1=(p-1)p^{e-1}+\cdots+p-1.$$
$$f^{q-1}=(f^{p^{e-1}})^{p-1}\cdots f^{p-1}.$$

$$f^{p^{e-1}}=\sum_{r+s+t=p-1}\frac{(p-1)!}{r!s!t!}X^{2rp^{e-1}}Y^{(s(n-1)+t)p^{e-1}}Z^{2tp^{e-1}}.$$

$$\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(q-1)}f^{q-1}\not\subset\mathfrak{n}^{[q]}.$$

証明の概要

- $I^{[p]} : I = I^{[p]} + I^{2p-2}$ を $S^{[q/p]} := k[[X^{q/p}]]$ に用いて $I^{[q]} : I \subset I^{[q]} + \mathfrak{n}^{4q-4q/p}$ を得る.
- Fedder 型の判定法より
$$2 \leq \mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) \leq 2 + \frac{4}{p}$$
を得る.
- $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ は標数に依らないので $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = 2$. $\square$

結果の一般化

一般化の方針

- $t = r$ のまま行列のサイズをあげる.

Conjecture

$2 \le r \le s, t = r$ のとき,

$$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = r(r-1).$$

- 下からの評価はできる.
- 次の予想が正しい場合上からの評価が成立.
(Macaulay 2 による計算により予想)

$$I^{[q]} :_S I \subset I^{[q]} + \mathfrak{m}^{rhq-rh}. \ (h = \mathrm{ht}\, I)$$

今後と展望

- 計算例が少ない.
  →計算例から一般論へ.
- 計算の手法を研究.
- F-pure threshold の意味付けを研究.