

QUADRATIC ALGEBRAS IN TWO VARIABLES

上山健太 (静岡大学大学院理学研究科)

k を代数的閉体とする . $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ を有限集合 , $k\langle X \rangle$ を X で生成された k 上自由代数 , $I \subset k\langle X \rangle$ をイデアルとする . I が次数 2 の斉次な関係式によって生成されているとき , $A = k\langle X \rangle / I$ を quadratic algebra という . 本研究の目的は 2 変数 quadratic algebra , つまり

$$k\langle x, y \rangle / (f_1, \dots, f_r), \quad \deg f_i = 2 \text{ for all } i$$

を次の二つの段階で分類することである .

- (1) 次数付き代数としての同型を除いて分類する .
- (2) 次数付き加群の圏としての同値 (次数付き森田同値) を除いて分類する .

2 変数 quadratic algebra の分類は関係式の数 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ により五つの場合に分けられ , $r = 0$ と $r = 4$ の場合は自明なものしかない . また $r = 1$ の場合の分類結果は知られている . $r = 3$ の場合は $r = 1$ の場合の quadratic dual を利用して分類される . 本講演では主に $r = 2$ の場合の分類手法や分類結果について述べる .

$A = k\langle X \rangle / I, B = k\langle X \rangle / J$ を n 変数 quadratic algebra とする . このとき

- 次数付き代数として $A \cong B$?
- $\text{GrMod } A \cong \text{GrMod } B$?

という問いは一般に難しい . そこで Artin, Tate, Van den Bergh [1] によって導入された point scheme という概念を用いると , この問いに対して幾何的にアプローチすることができる . A, B の point scheme をそれぞれ $\Gamma_A, \Gamma_B \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ とすると次が成り立つ .

$$A \cong B \quad \implies \exists \sigma \in \text{Aut}_k \mathbb{P}^{n-1} \text{ such that } \Gamma_B \xrightarrow[\sim]{\sigma \times \sigma} \Gamma_A$$

\Downarrow

$$\text{GrMod } A \cong \text{GrMod } B \quad \implies \exists \sigma, \tau \in \text{Aut}_k \mathbb{P}^{n-1} \text{ such that } \Gamma_B \xrightarrow[\sim]{\sigma \times \tau} \Gamma_A$$

これにより point scheme の分類を quadratic algebra の分類に活かすことができる . 2 変数 quadratic algebra の場合 , この幾何による分類はかなり効果的である . 実際 , $r = 2$ の場合は point scheme の分類を主に用いることで分類が完成した .

REFERENCES

- [1] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some Algebras Associated to Automorphisms of Elliptic Curves, The Grothendieck Festschrift Vol. 1 Birkhauser, (1990), 33-85.
- [2] K. Ueyama, Geometric classification of quadratic algebras in two variables, Tsukuba J. Math., accepted.
- [3] I. Mori, Noncommutative Projective Schemes and Point Schemes, Algebras, Rings and Their Representations, World Sci. Publ. (2006), 215-239.