線形の微分方程式に関するガロア理論とその応用について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　博士後期課程 1 年

斎藤　克典

代数方程式のガロア理論があるのと同様に, 微分方程式や差分方程式に対してもガロア理論が構成されている. したがって代数方程式の場合と同様にガロア群を見ることで方程式の解の"難しさ"というものを測ることができる.
例えば次のような $\mathbb{C}$ 上の微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & y \\ \frac{dy}{dt} & = & -x \end{cases}$$

では解を exp を使って書くことができる. (例えば $x = \exp\sqrt{-1}t, y = -\exp\sqrt{-1}t$) この場合ガロア群は, 可換な代数群 $\mathbf{G}_m \simeq \mathbb{C}^\times$ になる。力学系の中でも可積分系と呼ばれる系に対しては, 多くの場合ガロア群に可換性があることが知られている. これは解がある種初等的な関数でかけることと対応する.

講演では線形の微分方程式に対してのガロア理論 (Picard-Vessiot 理論) について簡単に述べ、その応用について知られていることを紹介したい.