巴系イデアルの第 1 ヒルベルト係数の挙動と環構造について

大関　一秀

本報告の内容は，L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, T. T. Phuong, W. V. Vasconcelos との共同研究 [GhGHOPV, GO] に基づくものである．

以下，A を可換な Noether 局所環とし，その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．環 A の次元 $d = \dim A > 0$ と仮定する．A-加群 M に対して，その長さを $\ell_A(M)$ と表す．このとき，環 A 内の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して，整数 $\{\mathrm{e}_I^i(A)\}_{0 \le i \le d}$ たちが存在し，任意の十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して，等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d \mathrm{e}_I^d(A)$$

が成り立つことがよく知られている．それぞれの係数 $\mathrm{e}_I^i(A)$ をイデアル I の第 i ヒルベルト係数と呼ぶ．このヒルベルト係数の挙動にはイデアルのみならず，基礎環の構造もかなり反映されていると考えられる．

本報告では，環 A 内の巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^1(A)$ の挙動に注目する．その上で，次の Vasconcelos の予想への解答を与えることを最初の目的とする．

予想 1 ([GhHV])**.** 環 A を unmixed とする．このとき，ある A 内の巴系イデアル Q に対して $\mathrm{e}_Q^1(A) = 0$ が成り立つならば，A は Cohen-Macaulay 環である．

さらに，巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数の値の取り方が高々有限であるような局所環の特徴付けについても行う．特に，$\mathrm{e}_Q^1(A)$ の値の定常性と基礎環の Buchsbaum 性に関する，次の様な特徴付けについて述べたい．

定理 2. 環 A を *unmixed* で $d \ge 2$ とする．このとき，次の条件は互いに同値である．

(1) A は *Buchsbaum* 局所環である．
(2) 巴系イデアル Q の第 1 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_Q^1(A)$ は一定値をとり，Q の取り方に依らない．

References

[GhGHOPV] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, *Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameters*, J. London Math. Soc., to appear.

[GhHV] L. Ghezzi, J.-Y. Hong, W. V. Vasconcelos, *The signature of the Chern coefficients of local rings*, Math. Ress. Lett. **16** (2009), no. 2, 279–289.

[GO] S. Goto and K. Ozeki, *Buchsbaumness in local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters*, Nagoya Math. J., to appear.

Meiji Institute for Advanced Study of Mathematical Sciences, Meiji University, 1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki 214-8571, Japan

E-mail address: `kozeki@math.meiji.ac.jp`