On a relation between canonical basis and Enyang's basis of B-M-W algebra

沖中 智史 (名大多元数理)

Birman-Murakami-Wenzl（B-M-W）代数は, Kauffman 多項式という結び目の不変量の研究を通じて, J.Birman-H.Wenzl 及び J.Murakami により独立に導入された代数です.

定義 1. $R=\mathbb{Z}[q^{\pm 1},r^{\pm 1},(q-q^{-1})^{-1}]$ とする. このとき, *B-M-W*代数 $\mathcal{B}_n$ は $T_i(1\le i<n)$ により生成され, 次の関係式を満たす結合的 R-代数である.

$$
\begin{aligned}
&(q-q^{-1})(1-E_i)=T_i-T_i^{-1}\\
&(T_i-q)(T_i-r^{-1})(T_i+q^{-1})=0\\
&T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1}\\
&T_iT_j=T_jT_i,\quad if\ |i-j|\ge 2\\
&E_{i+1}T_i^{\pm 1}E_{i+1}=r^{\pm 1}E_{i+1}\\
&E_{i-1}T_i^{\pm 1}E_{i-1}=r^{\pm 1}E_{i-1}\\
&E_iT_i=T_iE_i=r^{-1}E_i
\end{aligned}
$$

この代数は, 対称群の群環の量子化として知られる岩堀-Hecke 代数と密接な関連を持っており, 特に直交群や斜交群のテンソル積表現における centralizer として登場する Brauer 代数の量子化であるという側面も持っています.

それ故, この代数に対して, 岩堀-Hecke 代数に対する組合せ論的表現論のアプローチの延長線上で幾つかの先行研究が行われていて, その中の 2 つに, J.Enyang によって構成された基底と S.Fishel-I.Grojnowski によって構成された基底があり, これらはそれぞれ岩堀-Hecke 代数における Murphy 基底, Kazhdan-Lusztig 基底の拡張版になっています.

そして, 双方の基底とも岩堀-Hecke 代数の場合と同様に, B-M-W 代数に対しても cellular 代数構造を定めるのですが, 後者に対しては基底の存在のみが主張されていて, その基底の具体的表示がどの様に組み立てられるかについてはアルゴリズムが与えられていません.

この講演では, 手計算により得られた $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_4$ に対する Fishel-Grojnowski 基底を用いて, これと Enyang 基底との比較を行い, 双方の基底のパラメータ同士を Brauer 図形に対する Robinson-Schensted 対応で対応づけて上手く並べてやることにより, 基底の変換が三角行列として表されることをお話します. そして, 少しでもこの代数に興味を持ってもらえたらと思います.