Rees 代数の不変式環の強 F 正則性

大渓 正浩 (名古屋大学多元数理科学研究科)

現在研究中の内容について報告する. k を代数閉体, G を k 上の簡約代数群とする. A をネーター G 代数, すなわち G が作用するネーター k 代数とする. $I \subset A$ を G イデアル, すなわち A の G 部分加群であるイデアルとする. このとき, A の I による Rees 代数

$$\mathcal{R}_A(I) = A[It] = A \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus I^3t^3 \oplus \cdots \subset A[t],$$

(ここで t は A 上の不定元) もまた G 代数となる.

問題 1. G 代数 $\mathcal{R}_A(I)$ の不変部分環 $\mathcal{R}_A(I)^G$ の性質を特徴付けよ.

Rees 代数の不変式環を対象とした研究はそれほど多くない. 本研究の先行結果としては, 居相による, 有限群が環に作用する場合の Cohen-Macaulay 性および Gorenstein 性に関する結果がある.

本講演では主に A として有限次元 G 加群 V の対称代数 $\mathrm{Sym}\, V$ を考える. 次は簡単だが, 本研究の基礎となる.

定理 2. *G を k 上の線形簡約群, V を有限次元 G 加群, $A = \mathrm{Sym}\, V$ を V の対称代数とする. $\mathfrak{m} = A_+$ を A の斉次極大イデアルとする. このとき $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ は $\mathrm{char}\, k = 0$ のとき高々有理特異点を持ち, また $\mathrm{char}\, k > 0$ のとき強 F 正則である.*

この定理を一般化する方向として (1) G の条件を弱める, (2) G イデアル $\mathfrak{m}$ を変える, が考えられる. 以下主として (1) について考える.

$\mathrm{char}\, k = 0$ のとき, 任意の簡約群は線形簡約であることが知られている. したがって以下 $\mathrm{char}\, k > 0$ とし, G を線形簡約でない簡約群とする.

強 F 正則性は環直和因子に遺伝する. A^G は $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ の環直和因子であるので, $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ の強 F 正則性は A^G の強 F 正則性を導く. 特に定理 2 を一般化するには, A^G が強 F 正則となる G の作用を考える必要がある.

橋本は G 加群の良いフィルター付けを用いて, A^G が強 F 正則となる十分条件を与えた.

定義 3. G の Borel 部分群 B を固定する. G 加群 V が良いフィルター付けを持つとは, 任意の 1 次元 B 加群 λ に対して $H^1(G, V \otimes \mathrm{ind}_B^G \lambda) = 0$, ここで ind_B^G は制限関手 $\mathrm{res}_B^G : \mathrm{Mod}(G) \to \mathrm{Mod}(B)$ の右随伴関手, が成り立つことを言う. 良いフィルター付けについては Jantzen [2] を参照されたい.

定理 4 (橋本 [3])**.** V を有限次元 G 加群とする. $A = \operatorname{Sym} V$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば A^G は強 F 正則である.

上の定理の仮定の下で, 定理 2 の拡張が得られる.

定理 5. V を有限次元 G 加群とする. $\mathfrak{m}$ を $A = \operatorname{Sym} V$ の斉次極大イデアルとする. A が良いフィルター付けを持つとき, $\mathcal{R}_A(\mathfrak{m})^G$ は強 F 正則である.

参考文献

[1] S.-i. Iai, Action of finite groups on Rees algebras and Gorensteinness in invariant subrings, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **42** (1999), 393–401.

[2] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Second edition, AMS (2003).

[3] M. Hashimoto, Good filtrations of symmetric algebras and strong F-regularity of invariant subrings, *Math. Z.*, **236** (2001), 605–623