Buchsbaum 環内の擬ソークルイデアルの挙動について

堀内淳（明治大学大学院理工学研究科）

本研究の内容は明治大学の後藤四郎教授と櫻井秀人氏との共同研究基づくものである。以下，A は極大イデアルを $\mathfrak{m}$ を持つ Noether 局所環とする。$d = \dim A > 0$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限と仮定する。$Q = (a_1, \cdots, a_d)$ を A の巴系イデアルとする。このとき，Q に関する擬ソークルイデアルは，次のように定義される。

定義. $q \geq 1$ を整数とするとき，$I = Q :_A \mathfrak{m}^q$ という形のイデアルを，Q に関する擬ソークルイデアルと呼ぶ。

ここで, 我々の研究の主結果を述べたい。

定理. *A は Buchsbaum 局所環とし, $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ と仮定する。$q \geq 2$ は整数とする。$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は A の巴系イデアルとし, $Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}$ と仮定する。更に, $a_d = ab$, $(a \in \mathfrak{m}^q, \ \ b \in \mathfrak{m})$ と仮定しよう。このとき，$I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおくと, 次が正しい。*

(1) $\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q, \qquad I \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}, \qquad I^2 = QI.$

(2) I の第 1 *Hilbert* 係数は次のように記述される。
$\mathrm{e}_I^1(A) = \mathrm{e}_I^0(A) + \mathrm{e}_Q^1(A) - \ell_A(A/I).$

(3) I の *Hilbert* 函数は，全ての非負整数 n について，次の等式で与えられる。
$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \sum_{i=2}^{d}(-1)^i \left[\mathrm{e}_Q^{i-1}(A) + \mathrm{e}_Q^i(A)\right]\binom{n+d-i}{d-i}.$

(4) I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I) \ = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ は *Buchsbaum* 環である。$i < d$ なら，A-加群の同型

$$\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I)) = [\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_{1-i} \cong \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A)$$

を得る。また，次が正しい。

$$\max\left\{n \in \mathbb{Z} \ \mid \ [\mathrm{H}_M^d(\mathrm{G}(I))]_n \neq (0)\right\} \leq 1 - d.$$

ここで，$M = \mathfrak{m}\mathrm{G}(I) + \mathrm{G}(I)_+$ は $\mathrm{G}(I)$ の次数付き極大イデアル，$[\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_n$ $(i, n \in \mathbb{Z})$ は，$\mathrm{G}(I)$ の M に関する第 i-次局所コホモロジー $\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))$ の n 次斉次成分を表す。

この定理における，我々の研究の主たる寄与は，主張（1）にある。主張（1）がひとたび示されると，$I^2 = QI$ であって I はイデアル $Q : \mathfrak{m}$ を含むので, 主張 (2) と (3) は後藤–大関 [GO, Section 2] から直ちに従う。同様に，主張 (4) は後藤–西田 [GN, Section 5] から従う。

参考文献

[GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra, Vol **181** (2003), 61–74.

[GO] S. Goto and K. Ozeki, *The structure of Sally modules – towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases –*, Preprint (2009).