不定値二元二次形式の類数和に関する漸近公式について

橋本康史（九州先端科学技術研究所）, hasimoto@isit.or.jp

原始的不定値二元二次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同値類と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の素な双曲的共役類との間には 1 対 1 の対応があり，また，二次形式の基本単数が，対応する $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の共役類の固有値の大きい方に一致することが知られている（Gauss）．このことから，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する素測地線定理（Hejhal, Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** などを参照）を二次形式の言葉で記述しなおすことで，次の漸近公式が得られる（Sarnak, J. Number Theory, **15**, pp. 229-247, 1982）．

$$\sum_{D\in\mathfrak{D},\epsilon(D)<x} h(D) \sim \mathrm{li}(x^2).$$

ここで，$\mathrm{li}(x) := \int_2^x (\log t)^{-1}dt \sim x/\log x$ で，$h(D), \epsilon(D)$ はそれぞれ判別式 $D>0$ に関する狭義の類数と基本単数である．これは，ガウスが予想し，ジーゲル（Ann. of Math. II, **45**, pp. 667-685, 1944) によって証明が与えられた，

$$\sum_{D\in\mathfrak{D},D<x} h(D)\log\epsilon(D) \sim \frac{\pi^2}{18\zeta(3)}x^{3/2}$$

の和をとる順番を取り替えたものであり，類数や基本単数の分布を調べるうえで，興味深い比較対象であるといえる．

本稿の筆者は，以前 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群に関する素測地線定理を利用して，

$$\sum_{p|D,\epsilon(D)<x} h(D), \qquad \sum_{(D/p)=1,\epsilon(D)<x} h(D)$$

のような，$\{D\}$ の部分集合にわたる類数和の増大度に関する研究を行った（arXiv.math/0807.0056）．しかしながら，すでに，Raulf (Forum Math. **21**, pp. 221-257, 2009) によって，

$$\sum_{D\equiv a \bmod n,\epsilon(D)<x} h(D) = C_{n,a}\mathrm{li}(x^2) + O(x^{2-\epsilon})$$

が示されていた．なお，この証明の中では，素測地線定理は全く用いられていない．類数公式を利用して，問題を，ディリクレ L 関数の 1 での値の値の和の評価を行う，という形に書き換える，という方針で証明がなされている．この中では，非常に労力を要する計算が丁寧になされていて，主要項の係数 $C_{n,a}$ まで，きちんと記述されている．ただ，$C_{n,a}$ の表示のし方は複雑で，具体的にどんな値かを知りたいと思っても，そのためにさらに面倒な計算をする必要があるため，はっきりと実体をつかみにくい．

本講演では，この係数をよりシンプルな形で記述しなおすこと，そして，誤差項についてもそれなりの評価を与えることを目標にする．