Buchsbaum 環内の擬ソークルイデアルの挙動について*

堀内淳[†]

この研究は明治大学 後藤四郎教授, 櫻井秀人氏の下で行った。以下，A は極大イデアルを $\mathfrak{m}$ を持つ Noether 局所環とする。$d = \dim A > 0$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限と仮定する。$Q = (a_1, \cdots, a_d)$ を A の巴系イデアルとする。このとき，Q に関する擬ソークルイデアルは，次のように定義される。

定義. $q \geq 1$ を整数とするとき，$I = Q :_A \mathfrak{m}^q$ という形のイデアルを，Q に関する擬ソークルイデアルと呼ぶ。

ここで, 我々の研究の主結果を述べたい。

定理. A は *Buchsbaum* 局所環とし, $\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathfrak{m}) \geq 2$ と仮定する。$q \geq 2$ は整数とする。$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は A の巴系イデアルとし, $Q \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}$ と仮定する。更に, $a_d = ab$, $(a \in \mathfrak{m}^q,\ \ b \in \mathfrak{m})$ と仮定しよう。このとき，$I = Q : \mathfrak{m}^q$ とおくと, 次が正しい。

(1) $\mathfrak{m}^q I = \mathfrak{m}^q Q, \qquad I \subseteq \mathfrak{m}^{q+2}, \qquad I^2 = QI.$

(2) I の第 1 *Hilbert* 係数は次のように記述される。
$\mathrm{e}_I^1(A) = \mathrm{e}_I^0(A) + \mathrm{e}_Q^1(A) - \ell_A(A/I).$

(3) I の *Hilbert* 函数は，全ての非負整数 n について，次の等式で与えられる。
$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_I^0(A)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_I^1(A)\binom{n+d-1}{d-1} + \sum_{i=2}^{d}(-1)^i \left[\mathrm{e}_Q^{i-1}(A) + \mathrm{e}_Q^i(A)\right]\binom{n+d-i}{d-i}.$

(4) I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ は *Buchsbaum* 環である。$i < d$ なら，A-加群の同型

$$\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I)) = [\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_{1-i} \cong \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A)$$

を得る。また，次が正しい。

$$\max\left\{n \in \mathbb{Z} \ \mid\ [\mathrm{H}_M^d(\mathrm{G}(I))]_n \neq (0)\right\} \leq 1 - d.$$

ここで，$M = \mathfrak{m}\mathrm{G}(I) + \mathrm{G}(I)_+$ は $\mathrm{G}(I)$ の次数付き極大イデアル，$[\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))]_n$ $(i, n \in \mathbb{Z})$ は，$\mathrm{G}(I)$ の M に関する第 i-次局所コホモロジー $\mathrm{H}_M^i(\mathrm{G}(I))$ の n 次斉次成分を表す。

この定理における，我々の研究の主たる寄与は，主張（1）にある。主張（1）がひとたび示されると，$I^2 = QI$ であって I はイデアル $Q : \mathfrak{m}$ を含むので, 主張 (2) と (3) は後藤–大関 [GO, Section 2] から直ちに従う。同様に，主張 (4) は後藤–西田 [GN, Section 5] から従う。

参考文献

[GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra, Vol **181** (2003), 61–74.

[GO] S. Goto and K. Ozeki, *The structure of Sally modules – towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases –*, Preprint (2009).

*本稿の内容は英文化し，国際数学専門誌に公表する予定である。

[†]明治大学理工学研究科基礎理工学専攻 (数学系)