Higher Frobenius-Schur indicators and quadratic Gauss sums

筑波大学数理物質科学研究科　　清水健一

有限群 G の指標 χ に対し, その n-th Frobenius-Schur indicator は

$$\nu_n(\chi) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^n)$$

で定義される. 有限群の表現論においてよく知られているように, χ を G の正則表現の指標とすると,

$$\nu_n(\chi) = \#\{g \in G \mid g^n = 1\}. \tag{1}$$

有限群の理論を有限次元 Hopf 代数に対して拡張することは, Hopf 代数の理論におけるひとつの指針である. Linchenko-Montogomery [LM00] は, 有限次元半単純 Hopf 代数の指標に対して Frobenius-Schur indicator を定義した. 講演者の最近の結果によれば, H を "群論的 (group-theoretical)" な有限次元半単純 (quasi-) Hopf 代数とすれば, その正則表現の n-th Frobenius-Schur indicator $\nu_n(H)$ は, H から定まるある有限群 G とその normalized 3-cocycle $\omega \in Z^3(G, \mathbb{C}^\times)$ を用いて

$$\nu_n(H) = \sum_{g\in G}\delta_{g^n,1}\prod_{k=1}^{n-1}\omega(g, g^k, g) \tag{2}$$

で計算できる. もし ω が trivial ならば, この式の右辺は式 (1) の右辺と一致することに注意せよ.

我々は代数的な動機から式 (2) を得たのであるが, 実はこの式の右辺は Altschüler-Coste の研究 [AC93] に, レンズ空間 $L(n, 1)$ の Dijkgraaf-Witten 不変量の公式として現れている. 彼らは G が巡回群の場合にこの和を計算し, それが quadratic Gauss sum

$$S(a, m) := \sum_{i=0}^{m-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}\cdot ai^2\right)$$

を用いて表されることを示している. 有限群はその巡回部分群の和集合であるから, この事実は群論的 Hopf 代数の正則表現の Frobenius-Schur indicator を調べる際に非常に有効である.

講演では, 上記のような観察の下に得られる, 群論的 Hopf 代数の正則表現の Frobenius-Schur indicator に関する最近得られたいくつかの結果を紹介したい.

参考文献

[LM00] V. Linchenko and S. Montgomery. A Frobenius-Schur theorem for Hopf algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 3(4):347–355, 2000.

[AC93] D. Altschüler and A. Coste. Invariants of three-manifolds from finite group cohomology. *J. Geom. Phys.*, 11(1-4):191–203, 1993.